目　録

紀念《算法統宗》成書400週年

楚國數學淺談

宋述剛
（荊州師範專科學校數學系，荊州）

楚國是我國先秦時期歷時最長的故國之一。從周初立國至公元前 223 年秦滅楚，長達八百多年。《左傳·昭公十二年》載："昔我先王熊繹，辟在荊山。篳路藍縷，以處草莽。跋涉山川，以事天子。唯是桃弧棘矢以供御王事。"楚人立國後，艱苦鬥争，奮發圖强，至春秋戰國時期，發展成爲領有現今湖北全省以及湖南、陝西、四川、河南、江西、安徽、江蘇、浙江、山東等省的一部分區域的泱泱大國。楚人兼收并蓄中原文化、吴越文化、巴蜀文化，形成了具有地方特色和民族特色的楚文化。楚人不僅以物質文明居於春秋戰國時期各國之首，而且其精神文明如哲學、文學也獨辟蹊徑，富于啓迪。特别是作爲自然科學皇后的數學，楚人也作出了卓越的貢獻。

楚人在哲學、天文、曆法、建築、農業、商業、手工業等方面進行了大量與數學有關的實踐活動，這些實踐活動促進了楚國數學的形成與發展。然而由于流傳下來的有關史料太少，作者難于對楚國數學作出詳盡的準確的評價，這裡僅對楚人有關數學實踐活動作些探討。

一、楚國哲學中的數學思想

楚國哲學的典型代表是老、莊哲學。老子（約公元前 571——前 470）是楚國的偉大思想家，他有獨特的宇宙觀、人生觀與政治觀。《老子》第二十五章說："有物混成，先天地生，……可以爲天下母。吾不知其名，字之曰道。"[1]第四十二章又說："道生一，一生二，二生三，三生萬物。"這一論述蘊藏着把宇宙中的事物抽象爲數，把事物的衍生演化抽象爲數的變化的數學思想和方法，并且蘊含着一個無窮變化過程。

莊子生活在公元前三、四世紀之間，他繼承和發展了老子哲學。《莊子·天下篇》中的著名命題："一尺之棰，日取其半，萬世不竭。"給出了中算史上第一個無窮小數列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

這一命題其意在"不竭"，反映了莊子的潛無窮思想。

此外，《莊子》還說："至大無外謂之外大一，至小無内謂之小一。"這一斷言又反映了莊子的實無窮思想。由此可知，莊子對無窮有着辯證的認識。

二、天文曆法中的數學活動

楚先民對天文曆法作出過貢獻。相傳楚人的始祖祝融是上古帝王的火正，其職責之一是"觀象授時"。到了春秋戰國之際，楚人對全天的星象更爲熟悉。爲了進一步對日、月、五星（水星、金星、火星、木星、土星）的運行及位置作系統的觀測和描述，繞天一周選取二十八個星座作爲觀測標志，稱之爲二十八宿或二十八舍。1978 年，湖北隨州市擂鼓墩戰國時期的曾侯乙墓出土了一件漆箱，箱蓋上按星宿的位置寫着二十八宿的星名，正中書一篆文"斗"字，這是迄今所發現的我國關于二十八宿全部名稱的最早記載。《史記·天官書》與《漢書·天文志》記載，創立二十八宿體系的是戰國中期的甘

德和石申二人，而甘德即是楚國天文學家。二十八宿體系的建立，對天文學和曆法學的發展有重大意義。

楚人在觀象授時的基礎上創造和發展了自己的天文學，也創造和發展了自己的曆法學。春秋時期楚國使用改進的周曆，即以冬至爲歲首，以建子爲年始（正月）的天正曆，它是楚國自己改進制定的[2]。戰國時期，楚國改用人正建寅即夏曆。此外，楚國還有一種以大事紀年的獨特習慣。

楚人建立自己的天文與曆法，必然涉及與時間相關的各種數據的計算，由此產生運算技巧與法則。

三、農業中的數學活動

農業是經濟的基礎。楚國爲了發展農業，大興水利事業。楚人築堤、開渠、鑿井，并興建大型水利工程。楚莊王時期，楚國令尹孫叔敖主持興建了期思雩婁灌區渠系工程——期思陂，楚人挖掘水渠，把屬今河南固始縣北境的古期思河水引入南境衆多中小陂塘中，然后再灌溉農田。這是我國歷史上有文獻記載中最早的一項大型水利工程[3]。戰國時期，楚國又在大夫子思的主持下，修建了較期思陂更大的水利工程——芍陂水利工程，楚人在今安徽壽縣西南的芍陂治湖築堤，建堰立門，開渠引水灌溉農田。楚國還在江漢平原修建了不少水利工程。

楚康王時期，楚國爲了治理整頓軍賦，由大司馬蔿掩主持對楚國的全部土地分門别類地進行了測量和統計，并按土地的優劣、多少來制定和收取軍事賦稅。《左傳·襄公二十五年》寫道："楚蔿掩爲司馬，子木使庀賦，數甲兵。甲午，蔿掩書土田：度山林，鳩藪澤，辨京陵，表淳鹵，數疆潦，規偃豬，町原防，牧隰皋，井衍沃。量入修賦，賦車籍馬，賦車兵、徒卒、甲楯之數。即成，以授子木，禮也。"

楚人已懂得了桔槔與杠杆原理，使用機井灌溉農田。《莊子·天地篇》載：子貢南游于楚，過漢陰，見一老丈抱瓮而灌，子貢說："有械于此，一日浸百畦，用力甚寡見功多。"

上述楚國大型水利工程的修建、國土測量與統計、軍事賦稅的制定、灌溉工具的改進，都必須依靠豐富的幾何知識，高超的計算能力，這些實踐活動必然産生各種平面圖形的面積計算，各種立體體積計算，以及各種比例算法等。

四、建築與商業中的數學活動

隨着楚國城市的繁榮，也由于頻繁的戰争創傷，楚國的建築業得到蓬勃發展。在城池、宫殿以及一般民宅的修建中，也用到大量的數學知識。

楚國的城市，首推郢都（今稱紀南城），其遺址猶存。全城大致爲方形，城垣周長 15506 米，城址面積約 16 平方公里，已知有城門七座，其中南北向各有水門一座，有古河道貫通，今仍通水，繞城有護城河。城垣爲夯築，殘高 4—8 米，底寬 30—40 米，上寬 10—20 米。1972 年至 1975 年，考古工作者曾作過實地發掘考察，郢都城内有多處宫殿建築和民宅建築的遺迹[4]。

楚國城市商業活動頻繁，楚國郢都成爲南北物資的集散地。隨着商業的發展，楚國製造了各種貨幣如海貝、銅幣、金幣和銀幣，并且一些金幣上還刻有算籌的符號，用來表示其數量[5]。楚國還獨有天平與法碼。最早的法碼出自江陵雨臺山 410 號戰國初期的楚墓。楚國法碼是一組從小到大的銅環，完整的有十枚。戰國中期的長沙左家山 15 號楚墓出土了九枚法碼，實測重量分别爲 125 克、61.8 克、31.3 克、15.6 克、8 克、4.6 克、2.1 克、1.2 克、0.6 克，基本上爲逐一减半。左家山 15 號墓還出土有天平，爲一支木杆，兩端繫有兩隻銅盤组成。

商業活動中，人們需計算各種商品的兑换比率以及比例算法，人們製做與使用度量衡，這些都促進數學的發展。

五、手工業中的數學活動

楚國手工業發達，首推冶金業，楚國銅礦資源豐富，著名的湖北大冶銅绿山古礦冶煉遺址就是當年楚國的大銅礦。楚創造了竪井與横巷相結合的開採方法，竪井與横巷都有木構框架。進行冶煉的煉爐，是呈圓臺形的竪爐，煉出的銅含量高達94%～97%。在鑄造、焊接青銅器方面，楚人也創造了獨特的方法。湖北隨州擂鼓墩1號墓出土的戰國早期的65件鐘、鎛均爲組合陶範鑄造而成，經光譜、微量化學定量分析證明，其含銅量爲77.54%—85.08%，含錫量爲12.49%—14.46.%，含鉛量一般小於2%，個别略高於3%，其它元素含量很少。這説明當時的匠師已能識别銅、錫、鉛的聲學特性和物理特性，并掌握了適當的配方，融聲、形於一體。

楚國還有發達的漆器手工業，木工手工業，紡織、刺綉手工業，皮革、琢玉和琉璃製造手工業等，這些手工業中體現了楚人超凡的數學才能。

六、《算數書》是楚國數學的寫照

前面我們討論了楚國在文化、經濟、軍事等方面的數學實踐活動，這些實踐活動積累與形成了楚國豐富的數學知識，爲成書《算數書》打下了堅實的基礎。

《算數書》於1984年元月出土於湖北省江陵縣荆州城西門外的張家山247號西漢早期墓葬中，由約二百支竹簡寫成，爲有60多個小標題的問題集，其内容與體例與成書約公元一世紀的《九章算術》非常相似[6]。

據考證，收藏《算數書》的247號墓主是原楚國人，死于吕后二年（公元前186年）或稍后[7]，墓主人年高博學，大約出身在戰國晚期。《算數書》中所述的各種制度，如税畝制，石衡制以及田畝面積等，都是春秋戰國時期幾個主要大國的制度，而不是秦漢時期新頒布的法制。因此，《算數書》的成書年代不晚於戰國晚期。由此可知，盡管目前還不知道《算數書》的作者是誰，但可以肯定的是，書中的數學知識必爲楚人所掌握，《算數書》是楚國數學的寫照。

綜上所述，雖然至今尚未發現關於楚國數學翔實的史料記載，但通過近幾十年的考古發掘工作和部分史料記載，我們不難發現，楚國有着當時先進的源於實踐又應用於實踐的實用數學，如關于面積問題、體積問題、分數、比例、小數命名、測望術、運輸問題等等都已有一定水平，由於測量的需要，也可能掌握了勾股定理。總之至少已具備所發現的《算數書》中的知識。楚國數學是中國古代數學的重要組成部分，它爲秦漢以後的數學發展奠定了牢固的基礎。

對於楚國數學的研究，還有待進一步深入，我們認爲今后肯定會發掘出新的資料。例如籌算就是一項應當研究的楚國數學問題。

參考文獻

1. 張震點校. 老子. 莊子. 列子. 長沙：岳麓書社，1989
2. 何幼琦. 論楚國之曆法，江漢論壇，1985.10
3. 何浩. 古代楚國的兩大水利工程期思陂與芍陂考略，楚文化新探，武漢：湖北人民出版社，1981

4. 張正明. 楚文化史. 上海:上海人民出版社,1987
5. 黄德馨. "郢爰"新探,湖北省考古學會論文選集(一),武漢:武漢大學學報編輯部. 1987
6. 杜石然. 江陵張家山竹簡《算數書》初探,自然科學史研究,7:3(1988),201—204
7. 陳耀鈞. 陳燕萍.《算數書》與《九章算術》,湖北省考古學會論文選(一),武漢大學學報編輯部. 1987

江陵張家山西漢墓墓主是誰？

李　迪
（内蒙古師範大學科學史研究所，呼和浩特，010022）

湖北江陵張家山西漢墓的發掘，由于出土文物之豐富和珍貴曾引起了不小的轟動，就數學文物來說，竹簡“算數書”的出土成爲中國數學史研究中的一件大事。從 1985 年起，已先後發表好幾篇文章[1-4]，對“算數書”進行介紹。遺憾的是，自 1983 年末出土到現在八年多尚未全部發表，其詳細内容至今不爲人所知。與此相聯係的一個極爲重要的問題就是墓主爲何人？發掘報告没有舉出任何可能的人物[5]，有的文章指出一些人名，而時代相近的有張蒼，但又説“可惜的是，我們還不知道張

二、文獻記載的張蒼

《史記》和《漢書》均有張蒼傳,內容大同小異。在其他部分也有不少記載。現摘要介紹於下。

張蒼,陽武(今河南陽武)人,"秦時爲御史,主柱下方書。有罪,亡歸。及沛公略地過陽武,蒼以客從攻南陽。蒼當斬,解衣服質,身長大,肥白如瓠,時王陵見而怪其美士,乃言沛公,赦勿斬。遂入武關,至咸陽"。這說的是張蒼降漢的過程,不是由楚降漢,而是由秦降漢。

劉邦平趙地以後,"以蒼爲代相,備邊寇。已而徙爲趙相",後因平燕王亂有功,"封爲北平侯,食邑千二百户。"其中,趙爲戰國時的一國,代爲趙北部的一郡,"代相"、"趙相"相當於代、趙的行政長官。又"遷爲計相","以列侯居相府"。漢文帝四年(公元前 176 年)張蒼爲丞相。文帝"更元年",即後元元年(公元前 163 年),"蒼遂病免",孝景五年(公元前 152 年)卒,時已"百餘歲"。

張蒼降漢以後,起初參與不少軍事活動,繼又擔任各級行政長官,最後升到丞相的高位。

張蒼"本好書,無所不觀,無所不通,而尤善律曆。"他一生從事的工作主要的有兩方面,其一是對天文曆算的研究,其二是對法律的製訂,圍繞這兩方面還有不少討論和鬥争,甚至因此使他受挫。下面摘幾段與出土文物相對應的文字,以作比較。

"蒼爲丞相十餘年,魯人公孫臣上書,陳始終五德傳,言漢土德時,其符黄龍見,當改正朔,易服色。事下蒼,蒼以爲非是,罷之。其後黄龍見成紀,於是文帝如公孫臣以爲博士,草立土德時歷制度,更元年。蒼由此自絀,謝病稱老。蒼任人爲中侯,大爲奸利,上以爲讓,蒼遂病免。"

這裡特别值得注意的是:張蒼因否定魯人公孫臣關於漢爲土德而受到挫折,"魯人"無疑就是竹簡中多次出現的那個"魯",而不是指魯王或魯侯。

張蒼對於法律特别關心,文帝前十三年(公元前 167 年)他和御史大夫馮敬聯合上奏:

"肉刑所以禁奸,所由來者久矣。陛下下明詔,憐萬民之一有過被刑者終身不息,及罪人欲改行爲善而道亡繇至,於盛德,臣等所不及也。臣謹議請定律曰:諸當完者,完爲城旦舂;當黥者,髡鉗爲城旦舂;當劓者,笞三百;當斬左止者,笞五百;當斬右止,及殺人先自告,及吏坐受賕枉法,守縣官財物而即盜之,已論命復有笞罪者,皆棄市。罪人獄已決,完爲城旦舂,滿三歲爲鬼薪白粲。鬼薪白粲一歲,爲隸臣妾。隸臣妾一歲,免爲庶人。隸臣妾滿二歲,爲司寇。司寇一歲,及作如司寇二歲,皆免爲庶人。其逃亡及有罪耐以上,不用此令。前令之刑城旦舂歲而非禁錮者,如完爲城旦舂歲數以免。臣昧死請。"

得到批準,"是後,外有輕形之名,內實殺人。斬右止者又當死。斬左止者笞五百,當劓者笞三百,率多死"[12]根據這段文字可知,漢代的法律在文帝時期對於用刑方面有很大變化,而這種變化是由丞相張蒼和御史大夫馮敬製訂的。在考慮這問題時,必然要掌握前人的法律條文,墓中出現法律竹簡與此相符合。

還有一段記載,内容與《奏讞書》的許多條文一致,更爲重要,摘録如下:

"丞相臣張倉(蒼)、典客臣馮敬、行御史大夫事宗正臣逸、廷尉臣賀、備盜賊中尉臣福昧死言:淮南王廢先帝法,不聽天子詔,居處無度,爲黄屋蓋乘輿,出入擬於天子,擅爲法令,不用漢法。及所置吏,以其郎中春爲丞相,聚收漢諸侯人有罪亡者,匿與居,爲治家室,賜與財物爵禄田宅,爵或至關内侯,奉以二千石,所不當得,欲以有爲。大夫但、士五開章等七十人,與棘蒲侯柴武太子奇謀反,欲以危宗廟社稷。使開章陰告長,與謀使謀閩越及匈奴發其兵。開章之淮南見長,長數與坐語飲食,爲家室娶婦,以二千石俸奉之。開章使人告但,已言之王。春使使報但等。吏覺知,使長安尉奇等往捕開章。長匿不予,與故中尉忌,謀,殺以閉口。爲棺槨衣衾,葬之肥陵邑,謾吏曰:'不知安在。'。又詳聚土,樹表其上,曰:'開章死,埋其下'。及長身自賊殺無罪者一人;令吏論殺無罪者六人;爲亡命棄市罪詐捕命者以除罪;擅罪人,罪人無告劾,繫治城旦舂以上十

四人；赦免罪人，死罪十八人，城旦以下五十八人；賜人爵關內侯以下九十四人；赦免罪人，死罪十八人，城旦以下五十八人；賜人爵關內侯以下九十四人。前日長病，陛下憂若之，使使者賜書、棗脯。長不欲受賜，不肯見拜使者。南海民處廬江界中者反，淮南吏卒擊之。陛下以淮南民貧苦，遣使者賜長帛五千匹，以賜吏卒勞苦者。長不欲受賜，謾言曰：'無勞苦者'。南海民王織上書獻璧皇帝，忌擅燔其書，不以聞。吏請召治忌，長不遣，謾言曰：'忌病'。春又請長，願入見，長怒曰'女(汝)欲離自附漢'。長當棄市，臣請論如法。"[13]

這裡講的是張蒼等上奏淮南王劉長(前128—前174年)不服從漢朝政府的各種法令、擅自行動以及其他許多不規活動，建議論法"當棄市"。文帝"不忍致法於王，其與列侯二千石議"。進行討論。

淮南王案件是西漢初期轟動全國的特大案件之一，而此案正是張蒼、馮敬等告發立案的。因此涉及到的事情都比較高級，直到文帝。"關內侯"係侯位的第十九級，文帝元年(前178年)曾有"舉故以二千石從高祖者，悉以爲關內侯"[14]。

《奏讞書》中有些簡文與上述內容很相符或相近，例如俸二千石官的議罪問題，又如涉及到"皆關內侯"等等[15]。但因《奏讞書》是一種案例匯編性質的著作，所以案件很多，淮南王案僅是其中之一，而案情又與關內侯爵關係很大。

通過上述事實可見，張蒼的生平及事迹與墓主人幾乎完全一致，因此有理由認爲墓主人(主要是M247號)和張蒼是一個人。

三、張蒼的數學研究

三國時劉徽稱："按周公制禮而有九數，九數之流則九章是矣。往者暴秦焚書，經術散壞，自時厥後，漢北平侯張蒼、大司農中丞耿壽昌等皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘，各稱刪補，故校其目則與古或異，而所論者多近語也。"這段話的內容不完全正確，筆者認爲秦皇焚書不包括數學類，前人保存的竹簡不會受到嚴重毀壞。秦以前也未必有整本的數學著作，可能只是一些數學題目也包括一些解法。就張蒼在秦時的職務來看，數學題目類竹簡正歸他掌管。在秦漢交替之際，張蒼絕不可能把那些竹簡保存好，或者説他離開咸陽，必將其遺在秦都。在這種情況下，竹簡受到各種破壞是必然的。但是，劉邦第一次進入咸陽，"蕭何盡收秦丞相府圖籍文書"[16]。其中也可能包括數學簡。

張蒼好書律曆，漢元年(前206年)"遷爲計相，一月，更以列侯爲主計四歲。是時蕭何爲相國，而蒼乃自秦時爲柱下御史，明習天下圖書計籍，又善用算律曆，故令蒼以列侯居相府，領主郡國上計者"[17]。很顯然，原來秦所遺留的簡牘又都歸於張蒼之手。他做爲唯一的數學高手而居相府。

張蒼在漢初佔極重要之地位，高祖"天下既定，命蕭何次律令，韓信申軍法，張蒼定章程，孫叔通制禮儀，陸賈造《新語》"[18]。據如淳對"章程"所作注："章，曆數之章術也。程者，權衡丈尺斗斛之平法也"，師古説"程，法式也。"就是説，章程包括天文曆算與度量衡等廣泛的內容，而且都需要數學。

張蒼定章程過程中，要進行大量計算，重新積累了各種數學問題，使原來的數學簡牘得到增加，數學內容也得到了充實。把數學題收集到一起就是一部數學書的雛型。這種數學題簡是朝廷文件的一部分，當然要保存在朝廷主管部門。當時可能不會有書名，張家山出土的"算數書"也不能做爲書名理解，而是指該部分竹簡的內容，是講算數的書。至於《九章算術》的名字更不存在[19]。

根據上面的分析，我們可以得出兩個結論：第一，"算數書"是一種官書，它是朝廷各種計算問題的匯集，朝廷備用的參考題。因而也總結出各種計算的規則和程序，使一些官吏也能按程序進行有關計算。

第二，從保存和整理這些算題的目的就注定了在此基礎上演變出來的中國數學書必然是實用

型，而不可能是像《幾何原本》那樣的邏輯系統。《九章算術》肯定輾轉來自"算數書"，後者是前者的前身。《九章算術》的形式對中國數學後來的發展產生了深遠的影響。

我們還要指出：像"算數書"這樣的書僅是一種沒有定名的初稿形式，在張蒼的時代還不夠成熟。這也可以解釋何以古代文獻上不見記載的原因。

"算數書"在張蒼的時代必有極少的副本，否則隨葬之後就不可能再有題目和解法完全相同的算題保存在《九章算術》中。在朝廷裡肯定還有一部較爲完整的"算數書"，這纔有耿壽昌再次進行刪補的可能。在《九章算術》問世後，就使得其他一些數學書暗然失色，很快失傳。

因此，"算數書"只能和張蒼聯係在一起，止有他有資格和水平掌握"算數書"。在那個時代找不到第二個人。

四、幾個需要討論的問題

張蒼的故鄉在陽武，而從他的經歷來看又找不到他和江陵有何關係。那爲甚麽死後要埋葬在江陵呢？還有一個問題：發掘報告説：M247 號墓"棺内尸骨腐朽無存"，M249 號墓"尸骨亦已腐朽"[20]，而 M248 號因破壞嚴重，没有介紹。墓中的木制棺椁都保存了下來，而大批竹簡、木劍等都未腐朽，而惟獨尸骨腐朽，這種現象在考古上是存在的，即由于土壤的化學成份使尸骨分解無存。

張家山西漢墓所在地的地名也是要注意的。既然考慮到張蒼，那就必然要聯想到張家山這個地名。在早期的文獻中没有查到張家山的資料，直到清末，見到"張家山，太暉山西南"的記載[21]，而未提到山名的來歷。筆者推測：很可能是因其地與張姓有關而被當地人民逐漸把葬地叫起張家山來，由于是俗稱，所以遲遲不入文獻。張家山和張蒼聯係在一起，可能説明一定問題。

在張蒼的故里（陽武）有張蒼墓、張蒼墓冢堆、張蒼故宅。明天啓丁卯（1627）知縣趙應立過墓碑，"張丞相墓在縣東北四里，即漢張蒼墓，今任家谷堆地方，阜迹寂然"[22]，有碑文[23]等。張蒼的尸體可能未埋葬在陽武，即陽武的張蒼墓是衣冠冢，而江陵的墓是真的，目的是爲了防止有人盜墓，像張蒼這樣重要的人物，在墓葬方面肯定要採取一些措施。

根據以上的討論，我們得如下看法：張家山西漢墓是張蒼墓，而出土文物就是張蒼的遺物，"算數書"是他對數學問題研究、整理的副本。

筆者很歡迎考古界、科技史界和歷史界對上述看法提出批評和意見。

本文在研究過程中，得到宋述剛先生、陸思賢先生、郭世榮先生等的支持，在此致以謝意。

參 考 文 獻

1. 李學勤. 中國數學史上的重大發現，文物天地 1985 年 1 期，46－47

2. 杜石然，江陵張家山竹簡《算數書》初探，自然科學史研究第 7 卷第 3 期（1988），201－204；中國科學史國際會議：1987 京都報告書，1992，中村印刷株式會社，21－24

3. 陳耀鈞、陳燕萍. 算數書與九章算術，湖北省考古學會論文選集，1987，武漢大學學報編輯部出版，220－22

4. 城地茂：待查

5. 20. 荊州地區博物館. 江陵張家山三座漢墓出土大批竹簡，文物，1985 年第 1 期，1－8

6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 15. 張家山漢墓竹簡整理小組. 江陵張家山漢簡概述，文物 1985 年第 1 期，9－15

12. 漢書卷 23 刑法志第三
13. 史記卷 118 淮南衡山王列傳第五十八
14. 漢書卷 42 申屠嘉傳
16. 漢書卷 1 上高帝紀第一上
17. 漢書卷 42 張蒼傳；史記卷 96 張丞相列傳
18. 漢書卷 1 下高帝紀第一下
19. 李迪. 九章算術研究史綱. 劉徽研究(印刷中)
21. 光緒二年(1876)續修江陵縣志卷之三
22. 光緒陽武縣志卷 1 古迹
23. 光緒陽武縣志卷 5 文徵

後　　記

在會議之後，見到《文物》1992 年第 9 期上有一篇報道"江陵張家山兩座漢墓出土大批竹簡"，編號是 M127 和 M136。從年代來看與 M247、M249 相同；從位置來看，距離很近；從內涵來看，也無多大差別；從墓主人的地位來看，M127 和 M136 的墓主人地位都很高。由此推測：先後發掘的是一個完整的墓群，都是圍繞張蒼而造的，有的是他的妻妾(以百數)，有的可能是他的高級下屬，除已發掘者外可能在附近還有一些同類墓葬尚未發掘。和我們的結論不僅不悖，而且更有助於結論的成立。

中國幻方的起源問題

馮立昇
（內蒙古師範大學科學史研究所，呼和浩特，010022）

一、導　言

幻方(Magic Sguare)一名魔方陣，在中國傳統數學中則稱縱橫圖。它是一個1至n^2的連續自然數排成的$n\times n$方陣，其中每行、每列及對角綫的和均等于$\frac{1}{2}n(n^2+1)$。幻方在中國的歷史十分久遠，早在兩千年前，三三縱横圖(即三階幻方)便以"九宫圖"的形式在中國流傳。到了十三世紀，中國縱橫圖開始向高階發展，數學家構造出了三階以上，直至十階的幻方。盡管中外學者一致認爲，世界上最古老的幻方起源於中國，但中國幻方的發明年代目前還難以確定。由于宋儒用九宫圖來解釋《易經·系辭》所提"河出圖，洛出書"中的"洛書"，并認定上古傳說中的"洛書"爲一由點和圈排列而成的形象化的縱橫圖(圖1)，因而某些近現代學者把幻方的發明年代推到了中國的上古時代。圖1所示的洛書圖被許多中外數學史著作引用，幾乎被視作幻方發源於中國的象徵。但是由於缺乏可靠的證據，這種説法並没有得到科學史界的普遍承認。許多科學史家更爲關心的是幻方最早出現的確切記録。李約瑟博士在研究了中國早期的一些有關史料后得出結論，關於三階幻方的記録，"有綫索可查的最早著作似乎是寫於公元80年且含有許多早期資料的《大戴禮記》。"[1]這一看法已爲許多西方學者接受[2,3,4]。盡管一些西方學者認爲幻方的發明還有可能追溯到更早的戰國時期，但他們仍認爲幻方的明確記録最早見于《大戴禮記》[5,6]。1977年在安徽阜陽漢汝陰侯墓出土的一件西漢早期(173B.C)的九宫占盤爲研究幻方的發明年代和早期歷史提供了非常重要的實物證據，但這一新的資料没有引起國外數學史家的注意，近年來發表的有關文章仍然把幻方的發明年代定爲公元80年[7]。而中國學者也没有從幻方史的角度對這一資料加以認真研究。這一實物資料的出現，使中國早期一些文獻中關於三階幻方的記載得到證實，幻方發明的確切年代也要上推到西漢以前。因此，有必要對幻方的起源問題和早期的歷史進一步加以討論。目前對中國古代幻方的研究主要集中於討論幻方在宋代以來發展的情况，而對其早期的歷史研究的不够，一些早期的幻方史料，未被數學史家充分發掘和利用起來。本文試圖比較全面地論述中國早期的幻方史料，并在此基礎上對中國幻方的起源做初步的探索。

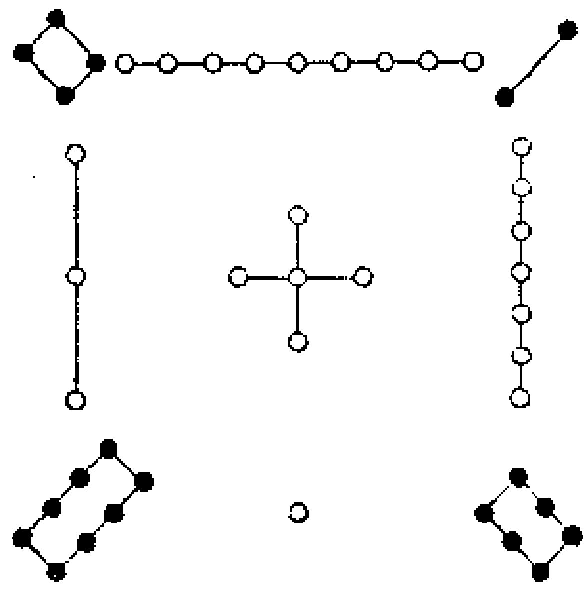


圖1　洛書圖

二、中國早期幻方史料考述

首先需要説明的是，下面將要介紹和討論的幻方史料，主要是指直接涉及到幻方的數學排列順序的資料；所選材料盡可能是早期的，漢代以后的史料一般不予考慮。

1. 漢文帝前元年間的太乙九宮占盤

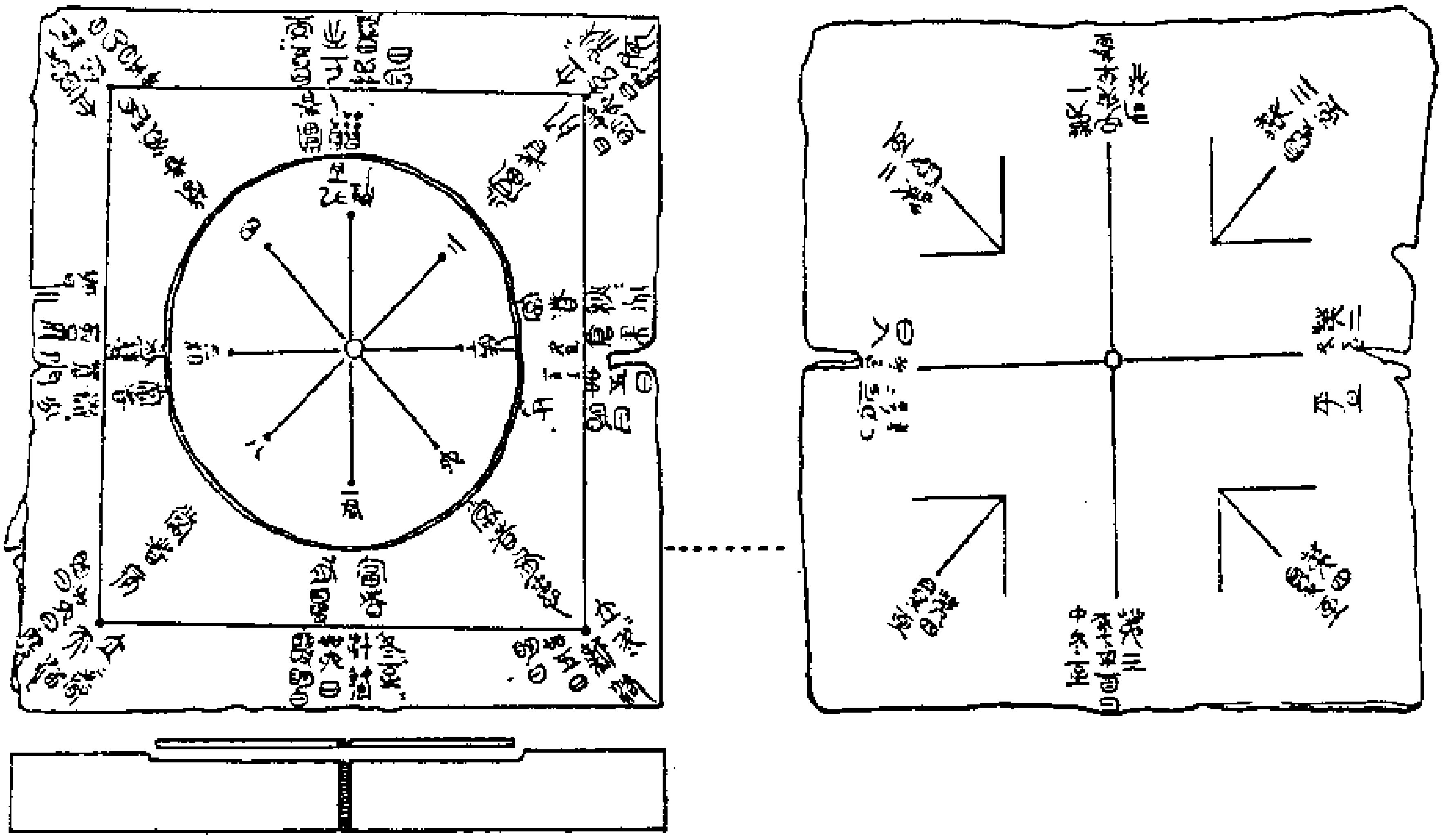


圖 2　太乙九宮占盤摹本

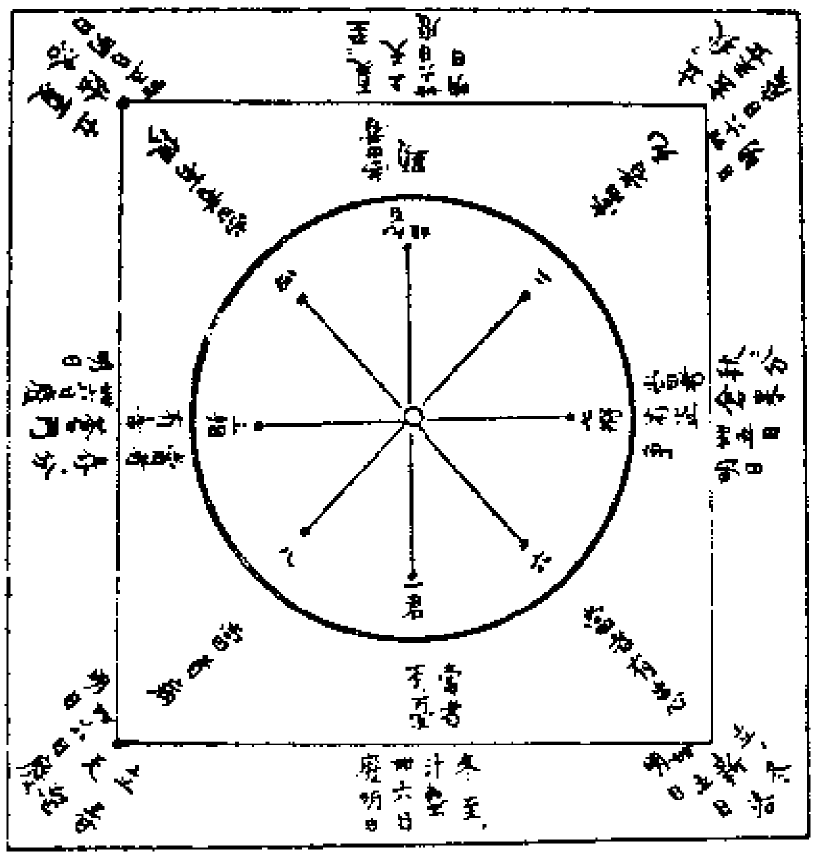


圖 3　太乙九宮占盤示意圖

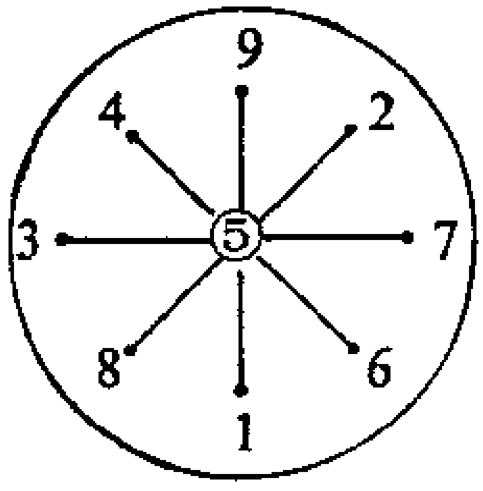


圖 4　占盤上的幻方

1977 年 7 月，在安徽省阜陽縣雙古堆西漢汝陰侯墓出土了竹簡和天文、占卜儀器等一批文物，其中有一件“太乙九宮占盤”。此占盤由上下兩盤組成，上面的小圓盤放在下面方盤的凹槽里，圓盤直徑 8.3 厘米，方盤邊長 14.2 厘米，兩盤中心有圓孔可以通連[8]。小圓盤過圓心劃四條等分綫，在每條等分綫兩端分別刻有“一君”對“九百姓”；“二”對“八”；“三相”對“七將”；“四”對“六”；繞中心刻有“吏”、“招”、“搖”、“也”四字。方盤在圓盤槽外至邊緣中間劃一方框綫，框內外按四面八方刻字，框外按順序在八個方向上刻有“冬至”、“立春”、“春分”、“立夏”、“夏至”、“立秋”、“秋分”、“立冬”等字樣。框內刻有“當者有憂”、“當者有喜”等與占卜凶吉有關的字樣(圖 2,3)。小圓盤上的數字是按照九宮圖的形式排列的[9]。如果將其中的數字用阿拉伯數碼改寫，并補上中央的數字“5”，可得到圖 4 所示的一個三階幻方，它的特點是呈圓形。由于可以判定這一九宮占盤爲漢文帝前元年間(179B. C～164B. C)的物品，因此它是目前所知最早明確記載幻方的實物資料。

雙古堆漢墓的主人爲西漢第二代汝陰侯夏侯竈，他死於文帝前元十五年（165B. C.）。九宮占盤是他的隨葬品，它的年代當不晚於公元前 165 年。在方盤的背面還刻有“七年辛酉日中冬至”等字。經推算漢文帝七年(173B. C.)的冬至日正逢辛酉，這對於確定占盤的年代提供了可靠的證據。

2.《黃帝内經》中的九宮數

《黃帝内經》是中國醫學理論的一部經典著作，包括現存的有《素問》和《靈樞》兩部分。它不是出於一人之手，而是在春秋戰國到秦漢時期，經衆多醫家編撰而成的。其成書年代一向有爭議，大致有成書於春秋、戰國時期，戰國末至秦漢之際、西漢前期及東漢時期等多種說法。但可以認爲它的主要部分形成於戰國時期，在流傳過程中也摻入了某些后人補撰的内容。《素問》、《靈樞》原各九卷，每卷九篇，各爲八十一篇。《黃帝内經》十八卷，見于《漢書・藝文志》，其書當在西漢末以前已經存在。

《素問》篇第七十“五常政大論”有“眚於三”、“眚於九”、“其眚四維”、“眚於七”、“眚於一”等語；其篇七十一“六元正紀大論”有“災七宫”、“災三宫”、“災五宫”、“災九宫”和“災一宫”等話[10]。論災眚方位時，用“三、九、七、一，五”來代表“東、南、西、北、中”五方，完全采自九宮數．這或許表明九宮數的位置模式已爲漢或漢以前的醫家所應用。但《素問》中包括這兩篇在内的九篇内容在唐初已佚，公元 762 年王冰注解此書時，從他老師處得一秘本，補入了此二篇和其它五篇，仍缺二篇．因此，這兩篇内容的年代似乎還有疑問。但西漢時醫家已知九宮，是不成問題的。



圖 5 《靈樞・九宮八風》篇首圖
録自《靈樞經台灸》

《靈樞》第七十七篇爲“九宮八風”，其内容與九宮有着直接關系。篇首圖與前面所介绍的太乙九宮占盤在九宮名稱、數字排列形式及各宮節氣的日數上均完全一致(圖 5)。《靈樞》重視研究氣侯的變化與人體的關系，以占風侯、治疾病。其“九宮八風篇”爲太乙九宮占盤提供了理論上的解釋，而占盤上的刻劃實爲此篇内容的圖解。“九宮八風篇”明確記載了九宮數的排列形式：“立秋二、玄委西南方；秋分七，倉果西方；立冬六，新洛西北方；夏至九，上天南方；招搖中央；冬至一，葉蟄北方；立夏四，陰洛東南方；春分三，倉門東方；立春八、天留東北方。”[11]將九宮的數字按其方位排列起來，顯然是一個三階幻方。

九宮占盤上的刻劃，都屬《靈樞》中討論的内容。“九宮八風篇”載：“太一常以冬至之日居葉蟄之宫四十六日，明日居天留四十六日，……從一處至九，日復返一，常如是，無已終。……太一在冬

至之日，有變占在君，太一在春分之日，有變占在相；……太一在秋分之日，有變占在將；太一在夏至之日，有變占在百姓。”占盤上所刻“君”、“相”、“百姓”等字，及各宫排列順序與此正相符合。

《靈樞》的成書年代過去有過疑問，但它的可靠性已被越來越多的學者所確認。馬王堆三號漢墓出土的帛書中有與《靈樞》中文字相近的内容，可以斷定《靈樞》包括有戰國時期醫學思想是無疑的。有學者考證認爲《黄帝内經》中的《靈樞》出現竟在《素問》之前[12]。在汝陰侯墓出土的文物中，還有件被稱作“六壬栻盤”的占卜用具，栻盤上所刻畫的文字及其排列布局情况同《靈樞・衛氣行》篇的有關記述十分相似，六壬栻盤與九宫占盤兩件文物，對于説明《靈樞》有關篇章成書于秦漢之前提供

4.《大戴禮記・明堂篇》中的九宮數

在漢代由戴德編成的《大戴禮記》中也有關於九宮數排列順序的明確記載。《大戴禮記・明堂篇》云："明堂者，古有之也。凡九室，二九四，七五三，六一八。"中外學者大多認爲這段話是最早明確記載幻方的文獻。

但是，目前對於《大戴禮記》的成書年代說法不一。西方學者一般都采用李約瑟博士的說法，認爲它成書（或修訂）於公元 80 年。而中國著名考古學家夏鼐在討論古代幻方時雖也認爲三階幻方始見於《大戴禮記・明堂篇》，但他認定這部書"是戴德在公元前一世紀中葉所編成的"[15]。

《禮記》是儒家禮學的一種論文集，各篇時代不同，早的屬于戰國，晚的可到西漢前期。漢代禮有大戴、小戴、慶氏三家之學。大戴即戴德，小戴是他的侄子戴聖，他們都是后蒼的門徒。漢初以來，至劉向校定經籍，諸家所記禮書有二百四篇。《隋書・經籍志》說，戴德刪其繁重爲八十五篇，稱《大戴禮》，戴聖又刪定爲四十九篇，稱《小戴禮》（即今本《禮記》）。但二戴主要活動於漢宣帝時期（73B.C～49B.C），戴聖，在宣帝時爲博士，曾在甘露元年（53B.C）參加評定五經異同於石渠閣。他們倆不可能刪定劉向在哀帝時（6B.C～1B.C）所校定之書。漢宣帝時，太學已設各經博士十四人，元帝時（48B.C～33B.C）增至十五人，其中包括"大戴禮"和"小戴禮"兩個專經博士[16]。因此，將《大戴禮記》的成書年代定爲公元前一世紀中葉是可信的。《大戴禮》現只存三十九篇，有北周學者盧辯的注。

過去中外學者一般認爲三階幻方的明確記錄最早見於《大戴禮記・明堂篇》，但太一九宮占盤的出土已經打破了這種說法，不但實物證據將三階幻方的確切記錄上推到公元前二世紀早期，而《靈樞・九宮八風》可靠性的證實還可使幻方的文獻 記錄推到戰國時期。

三、關于幻方起源的討論

我們已經根據一些確切的史料對幻方的發明年代問題進行了討論，并確定三階幻方在中國發明的年代不會晚於戰國時期。但幻方的起源是否可以上溯到更早的時期？早期的幻方是怎樣產生的？這是進一步研究需要考慮的問題。由於目前有人堅持認爲以三階幻方形式表現的洛書與上古傳說的"洛書"是一致的，實際等於承認幻方起源於上古時代，因而進一步的討論也是必要的。

根據古代的傳 說，伏羲時有龍馬從黃河出現，背負河圖；夏禹時，有神龜從洛水出現，背負洛書。這是中國一個古老的傳說，在《論語》、《尚書》、《墨子》等許多經典中均有記載或反映。河圖、洛書在兩漢時的著作中也經常出現，但在漢代人的著述中却沒有描繪河圖、洛書的圖形，漢人中也沒有誰指出洛書爲九宮數排列而成的圖形。直至宋代陳摶、劉牧、朱熹等易學家的著作中才出現河圖、洛書的圖形，他們或將河圖描述爲九宮圖，或將洛書描繪爲九宮圖。南宋起，才一致認定洛書與九宮等同。從科學史角度看，將傳說中"洛書"說成是三階幻方，并認爲它在公元前二千多年前已存在，并沒有可靠的證據。幻方是數學上的發明創造，它是人類數學發展到一定階段才會產生的"心靈思維"產物，因而未必能爲原始社會的人們所掌握。把幻方產生的年代上推到遠古時期，在考古資料上也沒有任何證據。

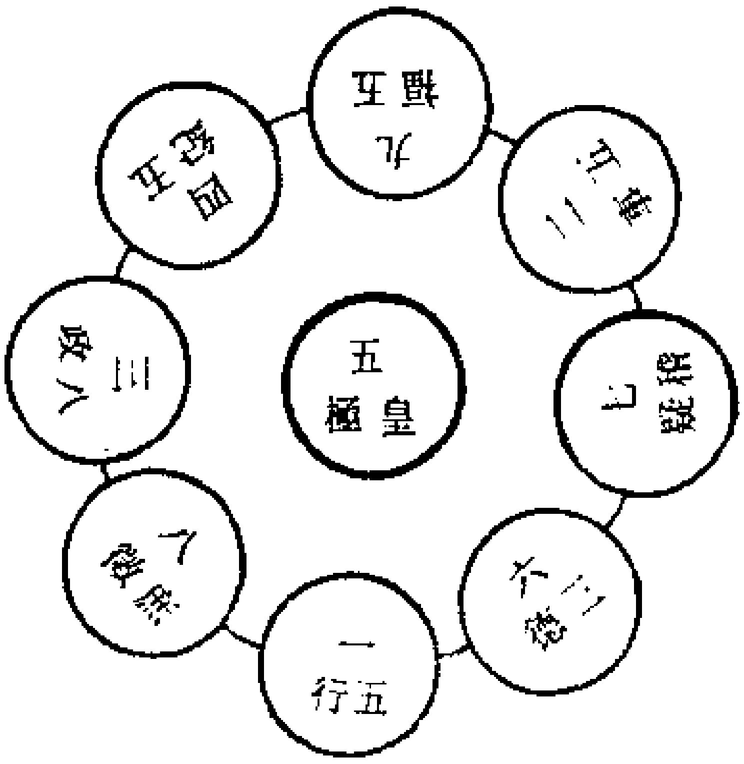
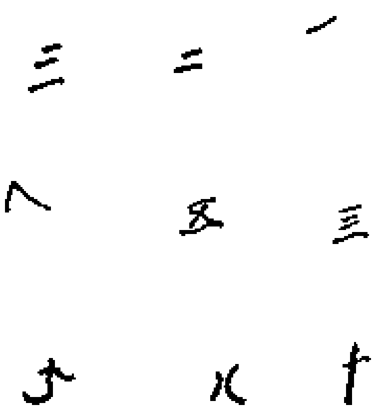


圖 7　伏生洪範九疇圖

但是，我們也應當看到，宋代學者的觀點是綜合前

人的説法加以發揮而形成，也并非完全是毫無根據的臆測。在宋代以前早已有人將洛書與九個數聯系了起來。《莊子》“天運篇”中有“九洛之事”的詞句，后來有人認爲指的是洛書。《尚書·洪範》有天賜大禹洪範九疇的説法。西漢時的孔安國作注説：“天與禹洛出書，神龜負文而出，列於背有數致於九，禹遂因而第之，以成九類，常道所以次叙。”《尚書·洪範》明確指出洪範九疇名目爲：“初一曰五行，次二曰敬用五事，次三曰農用八政，次四曰協用五紀，次五曰建用皇極，次六曰乂用三德，次七曰明用稽疑，次八曰念用庶徵，次九曰向用五福，威用六極”。劉歆在《漢書·五行志》中指出，以上六十五字就是洛書本文。活動於南朝末(陳朝)至唐初的陸德明(550~630)注釋洪範九疇時用圖來表示(圖 7)，而“伏生洪範九疇圖”的中心，實爲一個三階幻方[37]。此外，北周盧辯注《大戴禮記·明堂篇》時有“法龜文”之説。東漢徐岳《數術記貴遺》中有“九宫算”，北周甄鸞注云：“九宫者，二四爲肩，六八爲足，左三右七，戴九履一，五居中央”[18]。這與龜文之説正好吻合。我們還不能依據上述記載確認洛書即洪範九疇，也不能斷定漢代或漢代以前所説的洛書具有三階幻方的排列形式。但這些材料反映了一個比較重要的事實，説明以九宫數爲形式的洛書確實有它的淵源，它無疑根植于中國傳統思想之中。

上述把九宫數與龜文相聯系的傳統説法向我們表明，九宫數的産生大概與古代早期在龜板上出現的文字與數字有某種聯系。這給我們提供了重要綫索，從甲骨文中尋找縱橫圖思想的痕迹，或許可以發現三階幻方的更早淵源。



a

3	2	1
6	5	4
9	8	7

b

圖 8　甲骨文上的數字方陣

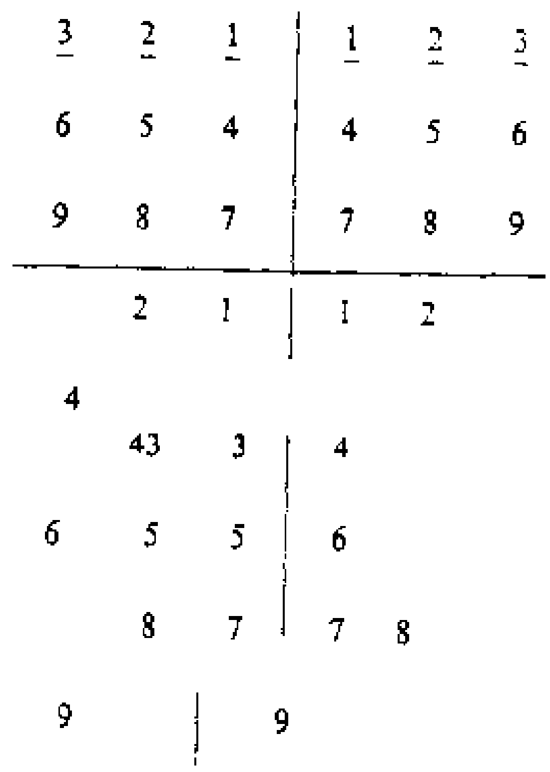
1	4	7
2	5	8
3	6	9

a

7	4	1
8	5	2
9	6	3

b

圖 9　甲骨文數字方陣示意圖



10　一片甲骨上的數字排列示意圖

在殷虚甲骨文中有很多記數的文字，不僅最大數目已達三萬，而且已經形成了完整的十進制記數法系統。甲骨文中記錄戰俘或牲畜的數目成千上萬，且均精確到個位，有些是統計數目的結果，而有些則顯然是運算后的結果。除了與具體的人或物連在一起的數目字外，還有不少甲骨上只排列了數字，而沒有同具體的事物相連起來。值得注意的是，在甲骨上出現了許多數字陣，將數碼按不同的方式排列成圖。如在《甲骨文合編》第 3418 片上有從 1 至 9 九個數排列成的方陣（圖 8a）[19]，這是一個按自然數順序排出的方陣。類似的數字排列，在甲骨文上多次出現，對於 1 至 9 的數碼也有按列排出的方陣，形如圖 9 所示。甲骨文中不但清楚地反映出"行"和"列"的觀念，而且許多片甲骨上的數字呈對稱排列。圖 10 給出了《殷虚文字綴合》第 199 片的數字排列順序，數碼下加橫道者，爲原甲殘損部分。其中上面兩組數字是 1 至 9 相向對稱排列而成的方陣。上述情況表明，殷商時代的人們已經對數字排列成的方陣發生了濃厚的興趣。商代的數學水平已經達到了較高的程度，我們不能排除當時對方陣上的數進行簡單的邏輯運算（如加法）的可能性。對於一個由 1 至 9 按自然數順序排成的方陣，不難發現它的"四正"、"四維"均合十五，只是沿着四條邊的方向數之和不等於十五。它實際上具有幻方的部分特征。

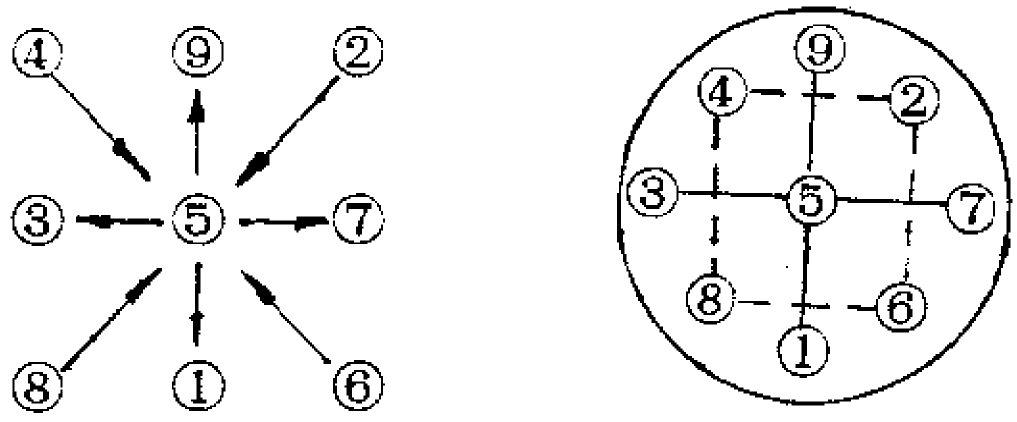
值得注意的是，西方學者在公元二世紀希臘人塞翁（Theon of Smyrna）的著作中發現了一個數字方陣，其形式與上面圖 9a 所示的方陣完全相同。著名科學史家薩頓認爲塞翁給出了"（中國傳統之外）關於幻方的一個最早的暗示"[20]。而李約瑟則更明確地認爲塞翁討論過一個幻方[21]，由于按自然數順序排出的方陣本質上不是一個幻方，因而這樣的說法不久便被其他西方學者所否定[22]。幻方確實與早期西方文化無緣，除此方陣外找不到任何可能與幻方有關的早期 證據，這種說法自然無法得到普遍承認[23]。同樣，我們也不認爲上述甲骨文中的數字方陣是三階幻方。但是，這裡與西方早期孤立地出現一個數字方陣的情形不同，我們不能簡單地認爲甲骨文中的方陣與幻方無關。三階幻方在公元前三世紀已爲中國學者熟知，它的產生肯定有更早的思想淵源。從思想發展的慣例來看，幻方的發明也可能是受到了以前某種資料的啓示。因而我們認爲甲骨文中的這些資料爲研究幻方的起源提供了一個不可忽略的綫索。我們還注意到，宋代數學家楊輝給出的三階幻方構造方法，就是以一個自然數順序排列的方陣爲基礎的。其三階幻方的構造過程大致如圖 11 所示。實際上，將甲骨文中所示的方陣旋轉 45°，然后把上下、左右的數對換便可得到一個幻方。有迹象表明，在甲骨文中可能已經有了某種旋轉方陣的處理方法，如果將圖 10 上面兩個方陣分别順時針和逆時針旋轉 90°，便可得到圖 9 所示的兩個方陣。早期的三階幻方呈圓形似乎也可以說明早期幻方的構造與自然數順序的方陣有關。在圖 12 中，把方形幻方轉化爲圓形幻方，只需按"四正"的十字方向或

7	4	1			1					9			4	9	2
				4		2			4		2				
8	5	2	7		5		3	3		5		7	3	5	7
				8		6			8		6				
9	6	3			9					1			8	1	6

圖 11　中國古代構造三階幻方的方法

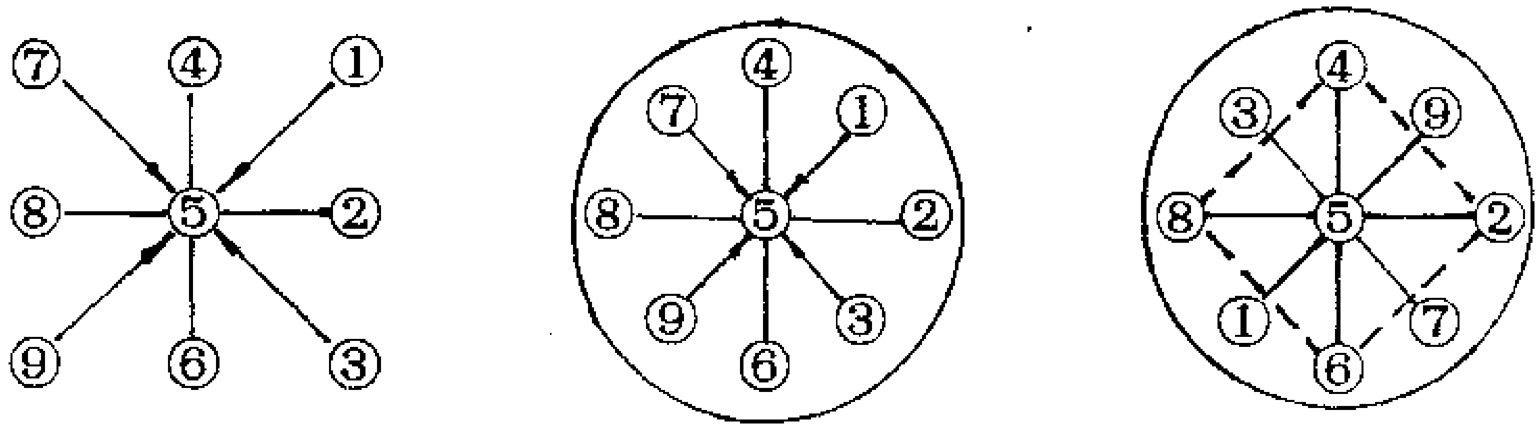
"四維"的×字方向變動一下相對的兩數字的距離便可實現。圓形幻方突出顯示了幻方"四正"、"四維"方向上的數字之和都合 15 的特征，但却隱蔽了原來方陣四邊上的數字和也均爲 15 的特征，這

說明在古人看來前者在構造幻方中的作用更爲重要。我們前面已經提到，自然數順序的方陣，其"四正"、"四維"也都合於15。對於圖13中的方陣，如果將每個對角綫(即×字方向)上兩數的距離適當變短，可得到一圓陣(圖13b)無論將其中兩相對的奇數對换位置，還是將偶數對换位置，仍能滿足"四正"、"四維"均合15的要求。圖13c是一個對换位置后的圖形，不難發現，它與圖12b相同，爲一圓形幻方。按照先秦時期早已有之的傳統說法，數一、三、五、七、九爲天數，二、四、六、八爲地數，而"天道曰圓，地道曰方"的思想在中國由來已久，圓形幻方的構造特點正與此相符。如果幻方中四個地數用直綫連接起來，正好爲一方形，而沿此方形每一邊上排布的三個數之和均等于15，這表明圓形幻方中隱含着方形幻方四邊上數字和均爲15的關係。圓形幻方的形式及特點對於探索早期幻方的構造方法無疑是十分重要的綫索。



a　　　　b

圖12　幻方形式轉换示意圖。



a　　　　b　　　　c

圖13　圓形幻方的一種構造方法

在甲骨文中除了有涉及對稱、對應、排列等方面的內容外，還有了奇偶的概念。目前在殷墟卜辭中發現不少"易卦"材料，這些"易卦"所出現的數字爲"一"、"五"、"六"、"七"、"八"、"九"。近年來還在殷墟發現刻在卜甲上排列有序的三個重卦，說明當時已有了奇數爲陽、偶數爲陰的原則[24]。對稱、排列、對應、奇偶等概念都是后來縱横圖思想的基礎。盡管我們還没有可靠的證據證明幻方在殷商時期已經産生，但可以認爲早期的三階幻方淵源於甲骨文中的數字方陣。幻方起源於戰國以前更早時期的可能性是存在的。但由於缺乏確切的證據，目前還無法確切地判明幻方發明的年代，我們只能說它的産生不晚於戰國時期。

参考文献

1. Needham,J. . Science and Civilisation in China, Vol. 3 Cambridge Universitg Press, 1959, 58
2. Camman, S. . Old Chinese Magic Squares, Sinologica, Vol. 7, No. 1, 1962, 14
3. Swetz, F. . Mysticism and Magic in the Number Squares of old China, Mathematics Teacher 71 (January 1987), 50
4. Biggs, N. L. The root of Combinatorics, Historia Mathematica, 6 (1979), 118～119
5. 同 2
6. 同 3
7. Swetz, F. . Ang Tian—Se, 中國數學史簡明年表及國外研究文獻介紹.科學史譯叢 1986 年第 1 期。原文載 Historia Mathematica, 11 (1984), 39～56
8. 安徽省文物工作隊等. 阜陽雙古堆西漢汝陰侯墓發掘簡報,文物 1978 年,第 8 期,12～31
9. 殷滌非. 西漢汝陰侯墓出土的占盤和天文儀器,考古 1978 年第 5 期,338～343
10. 《黃帝內經・素問》卷二十、卷二十一,《二十二子》本
11. 《黃帝內經・靈樞》卷十一,《二十二子》本
12. 趙璞珊. 對中國醫學形成的一些看法,中華醫史雜志 1991 年第 1 期,2～3
13. 《易緯》八種,《古經解匯函》本
14. 錢寶琮. 太一考,錢寶琮科學史論文選集,科學出版社,1983,228～229
15. 夏鼐. 元西安王府址和阿拉伯數碼幻方,考古學和科學史,科學出版社,1979,67
16. 毛禮銳. 漢代太學考略.北京師範大學學報(社會科學版)1962 年第 4 期
17. 《尚書・洪範》第六,唐陸德明釋文,《四部備要》本
18. 馮立升.《數術記遺》及甄鸞注研究.內蒙古師大學報 1989 年第 1 期(增刊)。
19. 郭沫若主編,《甲骨文合編》第二册,中華書局,1978,580
20. Sarton, G. . Introduction to the History of Science, I, Baltimore, 1927, 272
21. 同 1,61
22. Cammann, S. . "The Evolution of Magic Squares in China", J. Amer. Oriental Soc. 1980, 118
23. 同 4,120～121
24. 肖楠. 安陽殷墟發現'易卦'卜甲,考古 1989 年第 1 期,66～70

劉徽數學思想研究

席振偉
（江蘇常熟高等專科學校，常熟）

劉徽是中國歷史上卓越的數學家，近年來對他的各方面數學研究進行了許多探討，獲得了不少成果。對於劉徽的數學思想也同樣有些論文發表[1-5]，但仍有些問題需要進行探討，筆者準備就以下三點提出一些看法，向大家請教。

一、"陰陽之割裂"和"變易"爲核心的數學觀

劉徽在注解《九章》時，十分注重運用陰陽割裂和變易的辯證思想來認識數學，把握數學。他說："觀陰陽之割裂，總算術之根源，探賾之暇，遂悟其意。"即是說，陰陽雙方的割裂和變易，是事物發展的根本，亦是"算術"產生與發展的根源。這種對數學的辯證觀點對劉徽的數學創造產生了極爲深刻的影響。其中，他對正負術的創造就是突出的一例。

首先，劉徽抓住了正負數的相反相成關係指出："凡正負所以證其同異，使二品互相取而已矣。言負者未必負於少，言正者未必正於多"，即是說，正與負是相對的，稱"負"的未必就是少，稱"正"的未必就是多。其所以稱之爲正或負，不過是爲了區分具有相反意義的量使它們互相取用而已。他還說："今兩算得失相反，要令正負以名之。正算赤，負算黑，否則以邪正爲異。"其意是，在運算中，增加(減少)紅籌等於減少(增加)同樣多的黑籌。這表明，劉徽對正負數的認識不僅已經擺脫了以收盈爲正、支虧爲負的具體生活意義而進入揭示其相反相成關係的理性抽象，而且還深刻指出了這種數在加減運算中的辯證轉化。從這種認識出發，劉徽在《九章》建立正、負數加減運算法則的基礎上，創立了代數和。其次，在方程組問題中，劉徽指出，"每一行之中雖復赤黑異算無傷"，亦即改變方程各項系數符號，不會改變方程的解。這樣，劉徽又將解方程組時的加、減法消元法統一爲加法消元法，用他的話說就是："然則不得使頭位常相與異名，引條之實兼通矣。遂以二條反覆一率，觀其每與上下互相取位，則隨算而言耳，猶一術也。"劉徽的正負術無論在時間上或認識的深度上都遠高於其他國家。如比劉徽晚的印度婆羅門笈多(598—660年)當時對負數的認識還僅停留在"負債"等具體生活意義的水平上。對於運算間的互逆關係，劉徽也有深刻的理解和出色的應用，一個傑出的例子是關於方根定義，"方之自乘當還復其積分。"即開方要用自乘來還原。在乘除運算的關係上，所謂"一乘一除適足相消"之類的運算技巧劉徽常能自如地加以應用。如在"均輸"章第十七題的注文中，他說："一乘一除，勢無損益，故爲本存焉。"在"衰分"術的注釋中說："數本一也，今以所分乘上別，以下集除之，一乘一除適足相消，故所分猶存，且各應率而別也"。

劉徽應用陰陽割裂和變易的思想於數學研究不僅限於正負術和運算間的互逆關係，在曲和直方面，通過極限方法獲得了劉徽原理、圓積公式和圓周率，在形和數方面，獲得了整句股數公式的面積割補證明等，不僅在中國數學史上而且在世界數學史上都是些十分了不起的偉大創造。在思維方法上，劉徽在運用形式邏輯的時候，往往能用辯證的思想把它們組合起來，使之上升到辯證邏輯的高度，如類比、類推法，它既包含了演繹，又包含了歸納，分類的嚴格性和靈活性的多側面的統一。

中國古代科學方法的一個顯著特點是，特別擅長從辯證邏輯、辯證思維方面獲得啓示和指導。正如李約瑟所指出的，"當希臘人和印度人很早就仔細地考慮形式邏輯的時候，中國人則一直傾向

於發展辯證邏輯"[6]，劉徽的數學辯證思想，無疑是中國古代辯證思維寶庫中的一個重要組成部分，而他的數學辯證思想的形式却又離不開時代的影響。從劉徽的注釋中可以看出，《周易》的"一陰一陽之謂道"[7]，《老子》的"萬物負陰而抱陽"[8]等觀點對劉徽產生了深刻的影響。加之，先秦時的中國古代，如墨家的宇與久，盈與虛，兼與體，同與異，達名（普遍性概念）與類名（特殊性概念），有限與無限，荀子的常與變等等。劉徽的數學創造正是在這樣的背景下，從先人辯證思想的傳統中獲取了數學研究的有益啓示和指導而作出的。

二、"析理"與"用圖"相結合的科學論證思想

《九章》作爲中國古代經典著作，在東方和世界數學史上占有重要的地位。但是，《九章》也存在着一些不可忽視的缺點，最突出的是，記載在它上的所有公式、法則都一概沒有留下任何推導和證明。這表明，《九章》時代的中國數學，存在着嚴重的輕視理論證明的傾向。劉徽深刻洞察了這種傾向後指出："不有明據，辯之斯難"，他主張公式、法則都要建立在明白、可靠的證據的基礎上。他第一個爲《九章》中的絶大多數公式給出了理論證明，開創了建立在基本概念、基本原理基礎上的產生必然性結論的演繹論證，從而使我國古代數學開始成爲一門真正意義上的數學科學。

劉徽的論證思想，用他自己的話說就是"析理以辭，解體用圖"。中國古文中的"辭"是指言詞、義詞。但言詞、義詞是具有語音、語義的詞匯按一定的語法和邏輯結構所構成的，故"辭"有時也有邏輯或命題的含義。如《墨子・小取》中"以名舉實，以辭抒意，以説出故"中的"辭"，東漢唯物主義哲學家王充的一切思想表達形式，"皆以辭正得之中辭"就都具有命題、邏輯的含義。故劉徽的"析理以辭"就是用命題、邏輯進行理論論述。他"解體用圖"中的"圖"，是指圖形或作爲模型的"棊"。因此，"析理以辭，解體用圖"實際就是邏輯推理與直觀分析的結合。

邏輯推理的依據是概念的定義和基本原理，劉徽改變了《九章》對概念不加定義僅采用"默認"或"約定俗成"的辦法，明確地界説了許多概念。如"廣從相乘謂之冪"；"凡數相與者謂之率"；"凡母互乘子謂之齊，群母相乘謂之同"；開平方，"求方冪之一面也"；開立方，"立方適等，求其一面也"；"陽馬之形，方錐一隅也。今謂四柱屋隅爲陽馬"等等。此外，他還選擇了若干不加證明而認爲正確的命題作爲推理的出發點，這主要包括：長方形面積、長方體體積法則；面積、體積的"以盈補虛"（或出入相補）"原理、無限分割原理；截面原理；等等。例如，對圖形面積，劉徽從長方形面積出發，通過"以盈補虛"，把已知三角形割補爲以"半廣"、"正從"爲邊或以"廣"、"半正從"爲邊的直田，而獲得了稱之爲"圭田術"的三角形面積法則。對於圓面積，劉徽除間接使用"以盈補虛"原理外還應用了無限分割原理。他從圓內接正六邊形開始，通過逐次割圓，依次求得 $6 \cdot 2^n$（n＝1，2……）邊形面積。他指出："割之彌細，所失彌少。割之又割以至於不可割，則與圓合體，而無所失矣。"$S_{(6 \cdot 2^n)} < S$，而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_{6 \cdot 2^n} = S$，他還證明了 $S_{6 \cdot 2^{n+2}} + (S_{6 \cdot 2^{n+1}} - S_{6 \cdot 2^n}) > S$，而 $\lim\limits_{n \to \infty}[S_{6 \cdot 2^{n+2}} + (S_{6 \cdot 2^{n+1}} - S_{6 \cdot 2^n})] = S$。由於與圓合體的無限正多邊形，既是圓又是無限正多邊形，它又可分割成無限多個以圓心爲頂點的等腰三角形，這時將這些小三角形拼成方形後應用圭田術便可得到"以半周乘半徑而爲圓冪"的圓面積公式。可見劉徽對這些面積公式給出的是精確而又嚴密的演繹論證。值得指出的是，劉徽在注釋《九章》時，大量應用了屬於演繹推理的關係推理。如句股19問中的推理：$(\text{半邑方})^2 = \text{出北門} \times \text{出西門} \rightarrow \text{邑方} = \sqrt{4 \times \text{出北門} \times \text{出西門}}$ 等。這是劉徽"析理"，從而是他科學論證的一大特點。又，劉徽在推理論證的過程中，爲使"析理"更直觀、明確，他廣泛使用了圖形。如在推證圓面積公式及批判"周三徑一"不精確以推求圓周率的精密值時曾説到"又按爲圖"，"謹案圖驗，

更造密率"等。雖然劉徽使用的圖形至今已全部失傳，但僅從以上面積公式推證的注文中，我們可以看出他以"用圖"輔助"析理"的思想是十分明確的。但爲了使圖形更有效地輔助析理，他還使用了顏色圖。在"句股容圓"題注文中，就有"句股相乘爲圖之本體，朱、青、黄冪各二，倍之則爲各四"的記載。在處理立體問題時，由於圖形復雜他便改爲用棊，并選用立方、塹堵、陽馬、鱉臑標準幾何體來驗證柱、錐、臺的體積。如方亭(正四棱臺)的體積公式是 $V_{方亭} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}h$($a<b$，$a$、$b$ 爲方亭上下底，h 爲高)，劉徽推證時把方亭剖分成"中央立方一，四面塹堵四，四角陽馬四"的九個棊。即 $V = V_1+4V_2+4V_3$(V_1、V_2、V_3、V 分别爲長(立)方體、塹堵、陽馬、方亭及它們的體積)，然後將 V_1 與4個 V_2 亦即"中央立方一，四面塹堵各一"合成一新長方體，其長、寬、高分别爲 b、a、h，則有 $V_1+4V_2=abh$；又得 V_1、$4\times 2V_2$ 及 $4\times 3V_3$"中央立方一，四面塹堵各二，四角陽馬各三"共21棊合成另一長方體，長、寬、高分别爲 b、b、h，便有

$$V_1+8V_2+12V_3=b^2h$$

而 $abh+b^2h+a^2h=(V_1+4V_2)+(V_1+8V_2+12V_3)+V_1=3V_1+12V_2+12V_3=3V$，

故 $$V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$$

值得指出的是，劉徽的"用圖"并非僅限於輔助"析理"。與希臘數學相比，劉徽的圖形不僅是對問題條件的視覺印象，而且是爲證明所作的特别設計，因而圖形中往往能顯示出命題的結論而使之成爲數學發現的有力工具。

劉徽之所以能克服《九章》中存在的忽視理論論證的傾向而創立起"析理"與"用圖"相結合的科學論證思想，除了他自身具有的科學家素養的内因外，時代的影響也是不可忽視的。

中國封建社會，經過四百年的兩漢大發展，到了魏晋時期，出現了以莊園農奴制爲基本特徵的經濟關係和門閥士族對政治舞臺的佔據，繁瑣的兩漢經學讖諱迷信已走到了窮途末路。由於從漢帝國崩潰的瓦礫上生長起來的莊園經濟，具有分散的和自成一統的特性，故世家大族所關注的不是國家所代表的總體利益，而是個體的生成和發展，這種致思趨向促進了注重個體人格獨立的老莊學説的發展，並在儒道兼綜的基礎上加以闡發，進而出現了研究易、老、莊三玄[9]的辯難之風。辯難的玄學家們主張通過辯名析理來揭示問題中包含的義理，而不是像過去那樣單純依靠直觀意象和比附，正如何晏(公元190—249年)所説的："理之微者，非物象之所舉也。"[10]因爲它常導致荒誕和神密。且，辯難的實踐又爲推理論證積累了豐富的知識。如嵇康(公元223—262年)在《明膽論》中説："夫論理情性，析引異同，固爲尋所受之終始，推氣分之所由。順端極末，乃不悖耳。"[11]即是説，論證必須有明確的論題，可靠的論據和進行從始到終的分析論證。嵇康還指出了辯論方術上的"不盡"與"偏是之議"[12]等的毛病(《難宅無吉凶攝生論》)，這些無疑都是數學論證的寶貴財富。以嚴謹爲其特點的數學，幾百年來積累了大量公式、解法需要對其正確性加以理論證，而以"析理"爲要件辯難之風的興起爲這個過程的完成準備了客觀條件，數學巨匠劉徽是在這樣的條件下，通過"析理"與"用圖"的有機結合完成了絶大部分《九章》公式的演繹論證，致使我國古代數學真正開始走上了理論論證道路而成爲一門真實的數學科學。

三、以"類"、"故"概念爲基礎的數學邏輯思想

劉徽十分注重"類"、"故"概念的應用。徽注中説到"類"的有20處，説到"故"的178處[13]。其中，四處的"故"訓"舊"，一處訓"原因"，其餘都訓爲"是以"，即用以表達事物的因果關係。這表明，劉徽的邏輯思想中，類概念和尋求事物因果關係思想佔有相當重要的地位。

劉徽出發於類概念爲基礎的邏輯思想，主要表現在：

1、改變了《九章》中數學概念不加定義，而僅用默認或約定俗成的方法，出現了建立在類概念基礎上的屬加種差的定義方式。例如，開立方，劉徽注釋道，"立方適等，求其一面也。"意謂立（長）方體三度相等而由體積求其棱長的運算。其中，運算是屬，立方適等時求面是種差。又如，對句、股、弦，劉徽注曰："短面曰句，長面曰股，相與結角曰弦。"這里，矩"面"是屬，"短"、"長"、"相與結角"是種差。

2、"異類不比"，異類間的問題須化爲同類後纔能解决。例如，對於數，劉徽認爲"數同類者無遠，數異類者無近。遠而通體者，雖異位而相從也；近而殊形者，雖同列而相違也。"由於分數中的公分母"法"實際起着度量標準的作用，故分母相同的分數便成爲同一類，在其內部可進行比較和運算，亦即所謂"同者，相與通同共一母也。"而當分母不同時，則屬不同類。這時，施行"乘而散之"的運算可將它們化爲同類。故劉徽說，"乘而散之，所以通之。通之則可并也。"因此，通分運算實際是異類不比而要化爲同類的思想產物。對於圖形，劉徽亦說："物類形象，不圓則方。"顯然，他是將"圓"和"方"作爲兩類不同基本圖形來看待的。但這兩類圖形并非存在不可逾越的鴻溝，通過數學處理，它們可以互化。在"圓田術"中，他是采用割圓拼方的方法，即把圓割成內接正多邊形，再把正多邊形拼成方田形後，運用極限思想來證明的。

3、類比、類推方法。例如，在商功第25題推證"委粟術"時，劉徽應用了類比、類推方法。他說："從方錐中求圓錐之積，亦猶方冪求圓冪"。即是說，他從正方形與其內切圓的面積比爲 $4:\pi$，類推出方錐與其內接圓錐體積比亦爲 $4:\pi$。於是，$V_{圓錐}=\frac{\pi}{4}V_{方錐}=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{3}d^2h=\frac{\pi}{12}\cdot(\frac{c}{\pi})^2h$（$d$ 爲圓錐底面直徑，h 爲錐體高）。取 $\pi\approx3$，則 $V\approx\frac{c^2}{36}h$，即是"下周自乘，以高乘之，三十六而一"的"委粟術"。類似地，他還將二元一次方程組的加減消元法推廣到四、五元綫性方程組，指出"以小推大，雖四、五行不異也。"這種類比、類推法，是在把握了某一類事物的典型例子後，用其中的一般原理推廣到該類的其他事物。它既包含了從個別到一般的歸納思想，又包含了從一般到個別的演繹思維。這樣的思維是建築在對事物進行科學分類的基礎上的。正如他所說的："事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹者，知發其一端而已。"就是要求把數學知識的一般原理，按類從"本幹"一直推到各"分枝"。

中國古代關於"類"概念的思想十分豐富。如《周易》講"引而伸之，觸類而長之"（《繫辭上》）；孔子講"舉一反三"（《論語・述而》）；墨家講"知類"、"察類"、"異類不吡"（《經說下》）[14]；荀子講"推類而不悖"（《正名》）[15]、"類不悖，雖久同理。"（《非相》）；《黃帝內經》講"比類"；《周髀算經》計講"問一類而以萬事達者，謂之知道。……是故能類以合類，此賢者業精習知之質也。"劉徽在注釋《九章》時，充分吸收了前人關於"類"概念的豐富思想，徽注中有的如"觸類而長之"，"舉一隅而三隅反"等還都引用了先哲的原話。可見，劉徽的類概念爲核心的數學邏輯思想，實際是他對魏前中國古代"類"邏輯思想的繼承和在數學中的創造性發展。

劉徽的數學邏輯思想中，除類概念思想外，"明故"、"審由"、"求導"（規律性）的思想也很突出。如他在序言中談到，注釋《九章》是要"總算術之根源"，"探賾"事物深奥、復雜的道理；他給《九章》202術的絕大部分作出了演繹論證；他以正負數、率、面積、體積概念爲邏輯起點，構建了《九章》的理論體系，並指出率的概念和性質是運算的"綱紀"等等都是有力的明證。

劉徽的這些思想與魏前中國古代的明故、審由、求導的思想傳統是分不開的。《墨經》講"察類明故"，孟子講"苟求其故"（《離婁下》），《淮南子》講"審其所由"；《周易・繫辭》講"探賾索隱，鈎深致遠"[16]等等。都是要探求事物間和因果關係和復雜、深奥、玄妙的道理及其規律性。劉徽將前人的這

些思想創造性地應用於數學中，開創了建立在基本概念、基本原理基礎上的演繹論證，從而使"明故"、"審由"、"求導"等建立在札實可靠的科學基礎上。顯然，劉徽的這些思想源於前人，但高於前人。

四、反對"以多爲貴"，主張"易簡用之"的要約"貴易"思想

"要約"和"貴易"是劉徽處理數學問題的重要原則。在"方程"章的注釋中，他曾借用《莊子・養生主》裡"庖丁解牛"的典故來闡明"要約"、"貴易"思想的含義及其重要性。他說："更有異術者，庖丁解牛，游刃理間，故能歷久其刃如新。夫數猶刃也，易簡用之則動中庖丁之理。故能和神愛刃，速而寡尤。"即"庖丁解牛"，要"游刃理間"，刀刃纔能"歷久""如新"。數學的原理和方法，也要遵循規律，做到簡要、明了，纔能"易知"、"易從"，纔有更廣、持久的應用。他批評某些算家，"拙於精理"，"或用算而布氈，方好煩而喜誤，曾不知其非，反欲以多爲貴"，他主張"約而能周，通而不黷"。在方程章第一題的注文中，他指出"用算繁而不省，所以別爲法，約也"。在"商功"章第六題注文中，談到用捨棄小數處理圓周率的方法，目的是"貴欲從易"。在約分問題上，他指出，"分之爲數，繁則難用"，即約分是爲了化繁爲簡，化難爲易。他還具體述明了這一方法的數學原理說，"其所以相減者，皆等數之重叠，故以等數約之。""約而言之者，其分粗；繁而言之者，其分細。雖則粗細有殊，然其實一也。"因爲等數猶如量之最大公度，法與實皆是它的整數倍，餘數隨着計算過程減而損之，當過程進行到有限步後必然得到等數。用最大公度量則分數最爲"粗疏"，那麽"等除法實"便得到了最簡分數了。可見，劉徽主張"要約"、"貴易"是始終一貫的，並一直成爲他注釋《九章》的重要指導原則。

劉徽的要約、貴易思想，不僅表現在對具體問題的微觀處理上，更表現在他對《九章》注釋的宏觀構思上。如率的問題，《九章》在計算中使用了率，但面很窄，且含義不同一。劉徽則給率作出了"凡數相與者謂之率"的明確定義，並用率統一了各種計算方法，指出，"今有術"是"都術"，進而得出率是計算"綱紀"的結論。劉徽用率解釋了《九章》的大部分術文約二百多個問題。在"方程"章中，他用率的理論探索了用消去常數項解方程組的"方程"新術等。這種用"率"概念統一《九章》各術的方法，使《九章》的理論系統到了最大程度的簡化和明化。

劉徽"要約"、"貴易"思想，與歷史的、時代的影響密切相關。他所舉的"庖丁解牛"，出於《莊子・養生主》，他所說的"得易用之"，出於《周易・繫辭》中"易則易知，簡則易從。……易簡而天下之理得矣。"[17]又，他生活的時代，正是儒學走向經學化道路而不斷衰微的時代，經學家將儒家典籍作爲聖經進行訓解和闡發，他們或以經解經，或以事義解經，形式煩瑣，學風僵化。正如劉歆在《移讓太常博士書》中所說的，"分文析字，煩言碎辭，學者罷老且不能究其一藝。"這種支離破碎的章句之學已將儒學推向了死胡同。而在劉徽時代已發展起來的以抽象思辯和"貴無"爲特徵的曹魏玄學，在內容和形式上則要求簡約，如徐幹（公元 171—218 年）在《核辯》篇中所說的"然則辯之言必約以至，不煩而諭"[18]。這種對煩瑣形式和僵化學風否定的文化思潮，對劉徽要約、貴易思想的形成和由此促進他在數學上的創造，無疑都產生了深刻的影響，這是因爲數學科學本身就是以簡潔性爲其基本特徵的。然而，由於儒家經學化影響的根深蒂固，劉徽的數學著述竟仍采用了注經的形式，它極大地妨礙了劉徽數學理論、思想的表述，也限制了它對後世的影響，這不能不說是一種十分令人遺憾的不足，可嘆的是，這種遺憾在爾後的數學發展史上還延續了相當長的一個歷史時期。

綜上劉徽數學思想的諸方面知，他的先進無限觀、極限思想和科學論證思想，是他在數學上蜚聲中外的兩大思想源泉。前者，使我國在圓周率精確值計算方面和多面體體積理論方面遥遥領先於世界很多年，後者使中國古代數學開始走上了科學論證的道路，從而在中國數學史上具有重要的意

義。類邏輯思想和要約、貫易思想，是劉徽進行數學發現和創造的重要武器。而所有這些，又都得益於唯物的數學觀和數形的統一觀，也得益於"陰陽之割裂"和"變易"的辯證思維的啓示和指導。

参考文献

1. 李迪．劉徽的數學思想，《科技史文集》第8輯"數學史專輯"，1982，第67—78
2. 周瀚光．劉徽的思想與墨子的興衰，《自然辯證法通訊》1984年5期，36—39
3. 巫壽康．劉徽《九章算術注》邏輯初探，《自然科學史研究》第6卷1期(1987)，20—27
4. 倪炳華．《九章算術注》的數學思想方法，《北京師範大學學報》(自然科學版)"增刊3"(1991)，84—88
5. 李伯春．論劉徽的數學思想，同上，89—93
6. 〔英〕李約瑟．《中國科學技術史》(中譯本)，第3卷"數學"，1978，科學出版社，337
7. 《中國哲學史資料選輯》(先秦之部中)，中華書局，536
8. 同上，635
9. 郭書春．劉徽，《世界著名科學家傳記》"數學家17"
10. 《三國志・魏志・荀彧傳附荀惲傳》裴松之注引《晉陽秋》。
11. 轉引自侯外廬等《中國思想通史》第三卷，人民出版社，179
12. 同上，185
13. 邢兆良、周濟．墨家科學思想的興與衰
14. 同〔7〕，419
15. 同〔7〕，1205
16. 同〔7〕，564
17. 同〔7〕，562
18. 汪奠基．《中國邏輯思想史》，1979，上海人民出版社，247

數學史研究文集第四輯 25—28　　1993年7月

籌算"開方術"的計算機程序與算法研究

沙　娜
(内蒙古師範大學科學史研究所,呼和浩特,010022)

中國傳統算法一般指在與西方數學合流之前,在我國獨立發展起來的數學理論和計算方法,它經歷了由古代到19世紀大約二、三千年的歷史,其特點爲形數結合,以算爲主,使用算器、算法語言(術),建立一套算法體系;與現代計算機的一些特點相一致,因而用計算機來研究中國傳統的各類算法是自然與合理的,並且,一些問題止有用機器纔能研究的更透徹。

中國傳統數學經過許多數學史家和學者的研究整理,取得了很大的成就,很多算法也早已從文字叙述式的語言翻譯整理爲符號式的代數語言,爲了使這些成果讓更多不懂中文、古文的人們了解,利用計算機語言的通用性是一個很好的途徑;由於古、今"硬件"和"軟件"的一些相似之處,使得在用計算機再現這些算法時,可獲得更多的信息。

本文以中算的"開方術"爲對象,對"開方術"的三個發展階段使用的三種方法:1)《九章》開方術;2)增乘開方術;3)正負開方術。以其籌算程序爲依據,導出相應的代數公式,從而用計算機"*FORTRAN*77"程序語言,設計出"開方術"的三個計算機程序,分别記爲$ZK1$、$ZK2$、$ZK3$。並作進一步的比較和研究,提出兩點看法:

(一)"開方術"中的倍根、取整等方法有限制計算循環次數的作用。

(二)"正負開方術"和"增乘開方術"并非異名同術的算法,前者求根的每一位有效值的方法和後者不完全一樣。兩種方法共存互補,以適應不同情況。"正負開方術"是發展的更完善、適應性更廣的一種算法。

"中算視開方爲一種特殊的除法,如清人李潢所説'除,有實有法;開方者,有實無法'。所謂'無法',實際是説'法'應在計算過程中由人們去求得"[1],本文認爲"開方術"即是在給了最初的"實"(被除數)之後,如何找到"法"(除數)及商,以及如何求下一步的實、法、商的過程,因而即可根據這三種數的不同得到方式編三種開方術的計算機程序。

《九章》開平方、開立方的各個演算步驟也即解方程、求正根的過程。後世數學家求高次數字方程正根方法無疑是在《九章算術》開方術的基礎上發展來的;《九章算術》少廣章裡有開平方、開立方、術文簡明,依術演算較爲方便;在開平方中借用一根算籌來表未知量的平方,開立方中借用一根算籌表示未知量的立方,這就給所列出的籌式一個代數方程的意義。開平方、立方的各個演算步驟也就是解方程、求正根的過程。後世數學家求高次數字方程正根的方法無疑是在《九章算術》少廣章開方法的基礎上發展來的。

少廣章開方法曰:"置積爲實。借一算步之,超一等。議所得,以一乘所借一算爲法,而以除,除已。倍法爲定法。其復除,折法而下.復置借算步之如初,以復議一乘之,所得副,以加定法,以除。以所得副從定法,復除,折下如前。"根據術文,求根的每一位有效值其籌算程序爲三,1)倍根,2)估根,3)減根;即

1. 首先將方程進行倍根變换,估計得方根的第一次近似值。
2. 利用"二項展開式"將原方程進行减根變换。
3. 以常數項除以一次項系數(以方除實),求得方程的下一次近似值。

如此循環往復，直到根值全部求出或求到一定位數乃止，其筆算程序爲：

例：　解方程 $x^2 = 55225$

1. 倍根：　方程的根是一個三位數，所以商的第一位數在百位上，$x = 100x_1$，代入原方程，$10000x_1^2 = 55225$

2. 估根：　$2 < x_1 < 3$　　$x_1 = 2$

3. 減根：　將方程作減根變換，即設 $x_2' = x - 200$
$x = x_2' + 200$ 代入原方程，減根方程爲
$x_2'^2 + 400. x_2' = 15225$

再倍根：　$10x_2 = x_2'$　代入減根方程
$100x_2^2 + 4000x_2 = 15225$

再估根：　$x_2 = 15225/4000$
$x_2 = 3$

再減根：　$x_3 = x - 230, x =_3 + 230$ 代入原式
$x_3^2 + 460x_3 + 22325$

倍根　$1 \cdot x_3 = x_3$　代入減根方程
$x_3^2 + 460x_3 = 2325$

估根　$x_3 = 2325/460$
$x_3 = 5$

得　$x = 235$

《九章》開方術算法原理爲：(以開平方爲例) 設有方程：$f(x) = x^2 - N = 0$ 求得方程的第一次近似值 x_1，作減根變換 $x_2 = x - x_1, x = x_1 + x_2$，代入 $f(x) = (x_1 + x_2)^2 - N = 0, x_2^2 + 2x_1x_2 = N - x_1^2$

$x_2 = N - x_1^2 2. x_1 = - f(x_1)/f'(x_1)$

$x = x_1 + (-)f(x_1)/f'(x_1)$

因用二項展開式系數得 $f'(x_1)$，則其 $f'(x_1)$ 可表示爲，《九章》開方術代數公式爲 $x = x_1 + N - x_1^n/n \cdot x_1$《九章》開方術與現在計算機開方中用到的牛頓迭代法基本一致，關鍵的兩點在於

(1) 初始值的選取，

(2) 用甚麼方法得到一次項系數(方)。

在編 $ZK1$ 時發現，雖然古、今開方原理一樣，然而在具體程序進行中，因計算工具有不同，其算法亦不盡相同，因而 $ZK1$ 也不完全同於一般的計算機牛頓開方算法，比較如下：

計算機：

一般牛頓法開方有兩個缺點：1) 在理論上初始值 $X_1 > 0$ 即可，然而計算時此值若不在根附近，則往往不收斂。2) 在計算中用到一階微分 $f'(x)$，但它可能無法得到或不易列出。這兩點在一般的開方中還并不明顯，但在以後的高次方程的數值解中則顯得突出。

籌算：

1) 對初始值的選取：由於一開始倍根，使得初始值很容易估計在根附近，并由於采用位值制，使這一步極易做到。由於這個方法被一直保留到高次方程的數值解中，因而在高次方程數值解中亦

不存在問題。

2) 一階微分即減根方程中的"方"，由於是用二次展開式系數得到，所以很好計算，在以後的高次方程數值解中，因用"增乘"方法得到，亦是很易計算與表達。

計算機：

在求根的下一位有效值時，其值不取整，亦無倍根過程，因而迭代次數是籌算的 1—2 倍，當然對計算機這并不算甚麼。

籌算：

因用手移動籌來計算，計算次數不僅勞作繁忙且易出錯，對此籌算採取了取整的方法，使運算一次即可得到一位有效值，減少了計算量，使用籌開方成爲可能。這些方法均保留至以后的高次方程數值解中。在國外，高次方程數值解的霍納算法即沒有倍根過程，這可能與其用筆算而致。

李迪先生在"中國傳統數學的程序性"一文中談到"中國傳統數學中'軟件'思想非常突出，可以說中國傳統數學主要是在配合或適應'硬件'的前題下發展起來的"。以上討論爲此觀點提供了又一佐證。

在很多書里都談到"增乘開方術"和"正負開方術"在求根的每位值時用的方法是一樣的，即"以方約實"法，然而當用此法編的 $ZK2$ 程序去計算《數書九章》中的方程題時，有些可得到根值，而有些則發散。後根據許蒓舫先生書中提到的"約略推知"法編出 $ZK3$ 程序來處理上述問題時，即可得到解決，因而本文作以下推測：秦九韶在使用"正負開方術"解方程時，同時有兩種方法來求根的每一位值，1)"以方約實"，2)"約略推知"，二者互爲補償；一般先用 1) 法來算，取其簡便，如算不出再用 2) 法。從這一點看 1) 和 2) 是不一樣的，後者發展的更完善，使用的範圍更廣；另外，從名稱上看，"正負開方術"并不也稱"增乘開方術"而另立名稱，似乎亦與 2) 法中看變實的"正、負"以定值有關。

值得提一筆的是 2) 法和現在的數值計算法中的"二分法"十分相似，而"二分法"在現在計算機算法中也常被用來求方程的根。

本文不當之處，望不吝指正。

附："開方術"FORTRAN77 程序

1　方法概要

$ZK2$、$ZK3$ 相同的部分是均要經過倍根、減根過程，在得到減根方程後，$ZK2$ 算法是用其常數項除以一次項系數得到根的每一位有效值。

$ZK3$ 算法則在 0—5，5—9 區間內，每隔 0.1 試值代入減根方程搜索一位有效值。$ZK1$ 和 $ZK2$ 算法原理一致，包括在 $ZK2$ 中，不另說明。

2　程序說明

$ZK2$：

1) 程序使用數組 $A(H)$、$B(H)$、$C(H)$、$S(H)$，簡單變量 N、H。

2) $READ$ 語句時，讀入 (1) N—方程系數的個數，$N=n+1$，n 是方程最高次幂。(2) 方程各系數，如缺某一項，該項系數讀入 0。

3) 讀入初始值 X，可首先用 $ZK3$ 算出後讀入。

$ZK3$：

1) 程序使用數組 $A(H)$、$B(H)$、$D(H)$、$S(H)$，使用簡單變量 N、U。

2) $READ$ 語句時，讀入(1)方程系數的個數 N，$N = n + 1$。(2)方程各系數。(3)隅跳的次數 U，(根的位數是 $U + 1$)。

3) 用 $ZK2$、$ZK3$ 兩種方法檢驗《數書九章》中全部方程題，均與原書答案相同。

4) 附程序清單(略)。

参 考 文 獻

1. 李繼閔. 九章算術及其劉徽注研究、西安：陝西人民教育出版社。1990，93
2. 許蒓舫. 中算家的代數學研究，北京：開明書局，1952，79
3. 闕治. 數值計算方法，北京：清華大學出版社，1990
4. 李宗義. 計算機數值應用法，臺北：復文書局，1979

論秦九韶大衍總數術

莫紹揆
(南京大學數學系,南京)

本文繼作者文[1]而作,對前説作一些修正及補充。凡與前文有異的均依本文。未作修改的,仍照前文。

1. 元數格

關於約奇約偶,仍照原説,即“約奇”指約成“互素”,而“約偶”指約得非互素即以等數約一數後、所得數與另一數(亦即與等數)仍有公因子,秦九韶説,“或約得五而彼有三十,乃約偶非約奇”,這個“乃”指“這便是”(不象通常見解,後者認爲“乃”指“於是”,這與秦氏原意不符)。這個注語是秦氏特意解釋“約奇”“約偶”。後面再跟一句“或元數俱偶,約畢可存一位見偶”但不能“兩位見偶”,例如,如果元數爲 6 與 8,必須約成 3 與 8(一位見偶)而不應約成 6 與 4(兩位見偶),這仍是“約奇弗約偶”之意。如果無法約奇,即“或皆約而猶有類數存,姑置之求等約之。”亦即必須盡量約奇(必要時使用“反約”,如例積尺尋原題),不能約奇時,則“姑置之”,等到其餘各對約遍後,再回頭檢查是否可約奇。如果其餘各對約遍後仍無法約奇,那就“或諸數皆不可盡類,則以諸元數命曰復數,以復數格入之”。可見凡能够對各對問數都能“約奇”時便是元數格,不能全部約奇必須“復乘求定”的,便是復數格。

秦九韶把揲蓍酒息、解祟、砌磚、失米算作元數格,正是用這個標準,當收數格或通數格的古歷會積化成整數後,亦屬元數格,拙文[1]把復乘求定步驟算在元數格内(把末句“以復數格入之”改爲“復數格”)似不妥當。

2. 復數格

依照秦九韶,對復數格的演算分三步驟:

第一,用總等泛約,“以諸數求總等,存一位,約衆位,始得元數。”

四庫館臣説:“題中但有三數可以一等數度盡者,即可用總等法,存一數約衆數,然後爲元數,凡度之後等數仍可約者,此數必當存之”,這個補充是對的,而且當存的數可不止一個(有多個數被總等約後仍與總等有公因子,這多個數都應存而不約),亦即“存一位”應理解爲“至少存一位”。

如果不添入這段注語,不注意“必存”的情況,那末便會出現錯誤的,我們看看秦氏所舉各例。

例 2(古歷會積)有總等 12,秦氏“存紀分一位不約”,這是對的,如存別位不約便錯誤了。

例 3(推計土功)有總等 3,秦氏存 54 不約,并説出標準是:“以約 3 位多者,不約其少者”,後世人們認爲應是:“以約 3 位多者不約其少者”。後世人們認爲應是“以約 3 位少者,不約其多者”。”但古漢語中常有“損之曰益,益之曰損”的用法,因此“多”“少”兩字未必是錯的。

例 6(程行計地)有總等 60,秦氏存甲不約而約乙丙,然後用毫無根據的理由跳過下列初等初約(第二步),答數只是偶然正確。但跳過初約却是根本錯誤的。四庫館員針對本例,提出:“凡總等數必小於連環等數,若甚大即爲連環等數,此題是也,故再約即用求總等法,不然不能合也”。對本題而言,雖然偶合這個説法,但須經常判斷“總等與初等”是否相同,相同時跳過初約反不若“凡度之後

等數仍可約者，此數必當存之”爲好。總之，秦氏以“處無衍數”“此即約奇弗約偶”爲理由而跳過初約一階段，是沒有根據的(按本例推導，很有理由認爲由於後人妄改，秦氏不負其責)。

例 7(程行相及)有總等 50，秦氏存乙不約，下面同様跳過初約步驟，致答數有誤，定母由 3，125，8 誤爲 3，125，16，衍母由 3000 誤爲 6000。我們亦有理由認爲這由後人妄改，秦氏不負其責。四庫館臣針對本題提出：“按復數求元數用總等法尚屬未密。蓋總等約後，有當連環求等者，有當即求續等者，其法不能定也。今少爲變通，凡復數皆見十者，先以十爲總等遍約之爲元數，俟連環求等畢復以總等十乘一數，然後再求續等以得定數”。這個補充完全必要而且正確，這時所謂“存一位”指：用總等遍約後，如總等存於一位，在初等初約時總等不參與運算，這便是文[1]中采用的說法。

例 8(積尺尋源)有總等 5，但秦氏不約，直接連環求等(即進行初等初約步驟)。這種做法，最爲正確而簡便。因此易見，求總等泛約之一步驟完全是多餘的，在任何情況下均可取消(直接進引初等初約)。後世闞孝和、張敦仁、時曰醇、黄宗憲等便都公開的取消總等泛約，其根源仍來自秦氏的積尺尋原題。

由上各例看來，秦氏對總等泛約步驟基本上是正確的，如果明確地補入下列語句：

“約後與總等有等者必當存之(亦即須約奇不約偶)”；

“所存總等在連環求等進行初約時不參加運算”；

那便無懈可擊了。當然，秦氏没有加入這兩句之一，可説他不够完善，有待充實。至於例 6、例 7 之留泛約而删除初約，可以斷定(下文再詳論)出自妄人的亂改，非秦氏原文。

第二步初等初約，秦氏説，“兩兩連環求等，約奇弗約偶復乘偶，或約偶或約奇，復乘奇”。

這段話出現多處謬誤，亦是導致人們對秦氏大衍術産生誤解的原因。四庫館臣説：“此四語有誤，應作：約奇弗約偶復乘偶，或約偶弗約奇復乘奇”，又説“然皆續等下用之，此處可省”。其實四庫館臣的話也不正確。

按前面既説“約奇弗約偶”則後面似應説“約偶弗約奇”，這種改法得到人們的一致贊同，但“復乘偶”“復乘奇”乃續等再約的事，下面馬上便將提到，這裡先提到豈非重復?四庫館臣因而説“此處可省，”但省了之後，由總等泛約之到續等再約，漏掉初等初約一步驟，正合例 6 例 7 的作法，這顯然是 錯誤的，作者在文[1]中也采用這個説法，認爲本段與下段均指續等再約(復乘求定)，而初等初約步驟則上文的“乃得元數”指：應先引進元數格(那様有初等初約)。照這個説法，則復數格止有“總等泛約”一步驟，實施這步驟後便轉到元數格，元數格中不能全都約奇時再轉到復乘求定。這也是一説，但這時復數格所以别於元數格的在於有没有進行總等泛約。既然有總等 5 的例 8 也列入元數格，有總等也可不泛約，那末復數格便没有列出的必要了。因此作者願對文[1]的説法加以修正。

既然初等初約步驟不能省，這裡應指初等初約，能不能改爲“約奇弗約偶弗乘偶，或約偶弗約奇弗 乘奇”?這様改是不妥當，爲甚麽要憑空地添入“弗乘奇”“弗乘偶”呢?(比元數格，在那裡便没有“弗乘偶”等字様)。還有一個更強的理由，“約奇”“約偶”中的步偶并不指奇數偶數、也不指奇位、偶位，然則“乘奇”“乘偶”便無所指了。通觀《數書九章》全書，出現“乘奇”“乘偶”字様的，除本例外，止有兩處。

其一是例 2(古歷會積)：“本題欲求一會，不復乘偶”，其實求一會或多會，都與“乘偶”無涉，這個注語也與上下文不相連，顯屬妄人亂加，非秦氏語。

其二是例 6(程行計地)“次以連環求等，約奇復乘偶得定母”，而程行計地全例有誤(被人誤改)，而且例 7 中説“以連環求等，約得定終”，這當屬原文，在例 6 處後人誤加成“約奇復乘偶得定母”。因此，“復乘偶”“復乘奇”兩者絶非秦氏用語，應删。

其次，復數格與元數格之别全在於是否全部約奇，在復數格中，止提“或約偶或約奇”即可，不

必再提"約奇弗約偶"，竊疑"約奇弗約偶"實應在總等泛約中，即應到上段，而全文應爲：

"以諸數求總等，存一位，約衆位，約奇弗約偶始得元數；兩兩連環求等，或約偶或約奇"。這樣，對總等泛約既明確定了標準，對初等初約也規定完整，沒有疏漏了。(至於秦氏各例中有當總等泛約時不合約奇情況(如例3、推計土功)、無非表示"約奇不約偶"；是充分條件，并非必要條件罷了。

第三步，續等再約。秦氏說：

"或彼此可約而有類數者，又相减以求續等，以續等約彼則必復乘此，乃得定數"。

續等再約的特點是：約彼乘此，初約則是：約彼存此，兩者不同。再約必須繼續進行直到兩數互素爲止。

在這裡秦氏說"約彼則必復乘此"。在例5(分糶推原)中亦說"或猶有類數存者，又求等約彼必復乘此"，都說"約彼乘此"而不說"約奇乘偶"或"約偶乘奇"，顯然這纔是秦氏本人的用語而"復乘偶""復乘奇"等語詞(文本身不通)必出自妄人所改。

綜合這三步驟便是對復數格的化歸過程。

顯然復乘求定(續等再約)這步驟復雜異常，它需多少步也無法預計，故秦氏又分出不用續等再約步驟的叫做元數格，是非常合適的，非常必要的，以往把爲十的倍數或總等非1的叫做復數格，看來不是秦氏的真正用意。

3. 正用數與借數

秦氏關於正用數與借數的概念很多人以爲多此一舉毫無用處。當然，對解同餘方程組而言，這兩概念沒有甚麼用處，但就理論而言，這兩概念却牽涉到好些理論問題，不容我們忽視。

先說正用數。秦氏說，

"并泛課衍母，多一者爲正用；或泛母多衍母倍數者，驗元數奇偶，同類者，損其半倍(或三處同類，以三約衍母，於三處損之)各爲正用數"。

這裡提出一種標準的用數(正用數)，并給出化一般的用數爲正用數的方法，無疑是很有價值的討論。可惜以往人們把提出"標準形"的人硬說是他只知道標準形，對別的形一無所知(或不會處理)。例如，秦氏規定方程"實常爲負"，這只是就標準形的方程立論(正如今日就首項系數爲1的方程立論一樣)，後人却說秦氏只會解"實常爲負"的方程，并說李冶不限定"常負"(實)，是一個突破，這正好說某人限定首項爲1對是受了極大的限制，當另一人不限定首項爲1時是作了極有意義的推廣，這豈非可笑之至！

值得指出，如果容許用數爲負還可定義其和爲1的纔是標準形的用處，這樣使用更方便了。

秦氏化一般用數爲正用數法，亦極值得注意，它表明秦氏充分了解一般同餘式有解的充要條件，因爲只有利用這條件纔能證明秦氏得的正用數是合法的。

所謂奇偶同類應指"同爲偶"(同奇時不能用)。設 a_i 與 s_i 同偶，則可將相應的用數 S_i，S_j 改爲

$$S_i - M/2, S_j - M/2 (M \text{ 爲衍母})$$

易證這兩個新用數是合用的。

如果多處(不限於三處)，比好 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，同有公因子 d 則"以等(原文作三)約衍母，於多處損之"，即選取 $h_1, \cdots, h_m$ 使其和爲 hd，然後將相應用數 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 換爲

$$S_1 - h_1M/d, S_2 - h_2M/d, \cdots, S_m - h_mM/d$$

利用上文新說的有解條件易證新用數是合用的。

當然，如果各問數已兩兩互素(已爲定母)，則各用數不能用這個方法而減少。但從秦氏的化成正用數的過程顯見秦氏已知同餘方程的有解條件。

再説借數。秦氏説，

"或定母得一而衍數同衍母者爲無用數。當驗元數同類者而正用至多處借之，以等約衍母爲借數，以借數損有以益其無爲正用。或多處無者，如意立數爲母，約衍母，所得以如意子乘之，均借補之。或欲從省勿借，任之爲空可也"。

設相應於 a_i 的定數爲 1（用數 S_i 爲 0，而 a_i 與 a_j 有等數 d，$S_j > M/d$（M 爲衍母），則可將 $S_i(=0)$，S_j 換爲

$$0 + M/d, \qquad S_j - m/d.$$

如果多處用數爲 0，例如，相應於 a_1,a_2,a_3 的定母爲 1，相應用數 S_1,S_2,S_3 爲 0，另一數 a_4 與 a_1,a_2,a_3 均有因子 d（未必爲最大公約數），秦氏説："如意立數爲母"所謂"如意"并非"任意"，而是"如上法"或"適當地"，立 d 爲母，以 d 約衍母 M，再以"如意子"（適當的數）乘之，作爲借數，這時 S_1,S_2,S_3,S_4 分别换爲：

$$h_1M/d, h_2M/d, h_3M/d \text{ 及 } s_4 - (h_1 + h_2 + h_3)M/d,$$

利用有解條件可知這樣做是正確的。

顯然用數 0，0，0 要比用數 $h_1M/d, h_2M/d, h_3M/d$ 方便得多，秦氏説，"或欲從省勿借，任之爲空可也"，又説，"如不欲借，則任得一"，足見秦氏亦知用數 0 非常簡便（從省），他之所以討論借數純粹表明問數非互素時必滿足一定條件（有解條件）。可惜秦氏没有用這個條件去檢查他所給出的數據，他在例 2 中所給數據便不滿足有解條件，再加以秦氏忽略化通數格爲元數格時所用單位已有更改，以致其答案顯然有誤，秦氏不得不説本題只用以明解法，答數并不合用。四庫館臣給以批評説："此數語蓋因得數不合而自解之。然算家終以得數爲準，得數不合則無以取信於人矣"。秦氏知有解條件而未加以利用，實在可惜。

4．大衍九問探討及其它

在《數書九章》中，以測望九問最多謬誤（四庫館臣語），但大衍九問亦然，幾乎每題均有大小不等的錯誤。作者在文[1]中已有所論列。尤以其中例 6，例 7 爲甚，别的錯誤大都由於抄定錯誤，而例 6，例 7 則在它的洋洋灑灑的宏論中，暴露出根本性的錯誤，與秦氏大衍總數術基本論點不相容的錯誤，證明這兩例絶非偶然的非字錯誤，而是不懂大衍術的人根據其錯誤理解而篡改原文所致。今細論如下。

例 6，正文各段與秦氏原考根本冲突：

"次以連環求等，約奇復乘偶得定母"，原文應是"約得定母"，已如上面所論。

"次以丙甲求等得三。於術約奇不約偶，蓋以等三約三，因得一爲奇。慮無衍數，乃使徑先約甲三百爲一百，復以三乘丙三爲九，既丙九爲奇，甲百爲偶，此即是約奇弗約偶"。既然約奇弗約偶，而三約三爲一得奇，爲甚麽不約它，既然"弗約偶"，而"約甲 300 得 100 爲偶"，理應不約，爲甚麽又約甲？這是本身説不通的。這段的做法完全是續等再約，爲甚麽不引續等再約爲據，而引"約奇弗約偶"爲據？足見這一段話完全是不懂大衍術的人的"傑作"，絶非秦氏本人或其學生之所爲。而且能不是秦氏本人所作偶然錯一兩個字所致，而是根本從頭妄作的。

再説例 7。由甲乙丙日行里數（300，250，200）而求定母時，亦由總等泛約跳到續等再約，漏掉初等初約第二步，表明它與例 6 出自同一人的手筆，但例 6 碰巧得出正確的定母與衍母，而本例則相應的丙定母大了一倍，衍母亦大一倍，是大衍九問中唯一求錯定母的例子。由定母而求得用數後，"次視前草中甲及乙 750 里（追甲及乙所需里數）爲乙率，乙及丙 2000 里爲丙率，各满乙丙日行里去之"，换言之，以乙追及丙里數作爲乙的剩餘，甲追及乙的里數做爲乙餘，這是完全没有根據的，又將

甲餘定爲 0，也是沒有根據的。既然三者的餘均爲 0，則所求答案當爲衍母或其倍數，但術草却說："雖稱同時俱至，乃各系全日所行，便以乙丙兩人約得三千里（按即衍數之半）爲彼去此里數"。答案竟不是衍母倍數而是衍母之半，這更是荒謬絶倫的。由這點看來，三千里必是原有答案，但前面部分脫落了，這個補作的妄人乃不得不自己計算，當得不出原有結果時，只好胡說一通，拼湊答案了。本例之爲妄人改作不是昭然若揭嗎？

妄人改作以前原文已不可見，自四庫館臣起，便作如下的改定："又既及之後，三人不能同行，及各至彼此之時刻皆與各起刻相同。蓋言自此至彼所行，皆爲整日數也"。這說雖受到數學史家一致贊同，但把"乃同時俱至彼所"解釋爲"各至彼此之時刻皆與各起程時刻相同"，是不妥當，難以服人的何況這樣解釋，則實與求最小公倍數無異，用不着大衍術了。鄙意"乃俱同時俱至彼所"，指各人雖不同日抵達，但均"同一時辰"（或在午時，或在申時等等）抵達，這樣纔是典型的大衍術題。

容易驗證，如果甲在乙後半日出發，則三人絶不能在同一時辰抵達（不管假設在甚麽時辰），只有甲在乙後小半日（晚兩個時辰）或在乙後大半日（晚四個時辰）纔可能有答案。題裡的"已半日"，不是說"既半日"而是說"大半日"，因爲在古漢語，"已"有作"太"字解釋的（"爲之已甚"便指"爲之太甚"）。只有作"太半日"解，便得答案爲：兩地相距 2000 里（甲到六日加兩個時辰，乙行 8 日，丙行十日）。

由此便足證今本例 8（程行相及題）絶非秦氏原意，而出於妄人的亂改，認清這兩例本非秦氏原文，纔能正確理解復數格的化歸法。

順便我們指出一些校勘問題。

測望第 6 題望敵圓營原文有誤。白尚恕先生以爲"秦氏不止誤 a 爲 $a+c$，還誤以爲 $AB'=C$"（參見[2]350 頁，今不列其圖），其實如認爲原題有誤字，稍作更正如下即可：

問敵臨河爲圓營，不知大小。自河南岸至某地七里，於其前（原作地）立兩表相去兩步。其兩表與敵營南北相值，人退兩表一十二步（即某地），遥望東表，適與圓營圓邊參合，……"。

其次，田域類 6 題（蕉田求積）應依宋景昌所見另本作"以長并廣，半之乃再自乘，又十乘之爲實，半廣半長各自乘，所得相減，餘爲從方，一爲從隅，開平方半之得積"，並把"并"理解爲"乘"，即得相應方程爲：

$$x^2+((b/2)^2-(a/2)^2)x-10(ab/2)2=0$$

這裡 x^2 爲所求面積。注意，如果 x 項爲 0，這方程之根恰爲以 a，b 爲兩軸的橢圓面積。

其三，軍旅類 2 題（方變銳陳）秦氏原題有誤，雖經四庫館臣與近人李兆華先生指出[3]，但未能改正，今特給出新解如下。原題說：

"問步兵五軍，軍一萬二千五百人，作方陳，人立地方八尺，欲變爲前後銳陳，陳後令多原方面半倍，陳間仍容騎路五丈以上，順銳形出入。求方陳面、銳陳長及前後銳陳各布兵幾何？"

前人的錯誤今不一一指出。只列出我們的解。

極易求得原方陣面（每邊）二百丈，新大銳陣的一邊因增半倍爲 300 丈，又因人立地方八尺，故可站 375 人。故新大銳陣可容人 $375\times(375+1)/2=70500$ 人，五軍共 $5\times12500=62500$ 人，實多 8000 人，這應爲騎路所擠掉的人數。設內銳陣每邊可站 b 人，到內銳陣所容人數爲 $\frac{1}{2}b(b+1)$、又設騎路二寬（兩段）可站 m 人，則內銳陣與騎路合併可容納 $\frac{1}{2}(b+m)(b+m+1)$ 人、從而騎路新擠掉人數應爲 $\frac{1}{2}(b+m)(b+m+1)-\frac{1}{2}b(b+1)=\frac{1}{2}m(2b+m+1)$ 人，以上所述應有

$$\frac{1}{2}m(2b+m+1)=8000$$

這是一個二元方程，但因 b，m 爲正整數，故可解出。

當 m 爲偶時，$2b+m+1$ 爲奇因子，它 $\geqslant m=$ 另一因子$(m/2)$ 的 2 倍，這不可能，因 8000 的最大奇因子爲 125，另一因子爲 64 而 $125<2\times 64$。

當 m 爲奇時，另因子爲 $\frac{1}{2}(2b+m+1)=b+\frac{m+1}{2}\leqslant b+m\leqslant 375$. 今求出 8000 的各種可能因子：

$$8000=1\times 8000=5\times 1600=25\times 320=125\times 64$$

而另一因子 <375 的只有 320 與 64. 因而有兩解：

$$m=25, b=320-(m+1)/2=307$$

$$m=125, b=64-(m+1)/2=1$$

當 $b=1$ 時，內銳陣有 $\frac{b}{2}(b+1)=1$ 人，可不必站人（取消內銳陣），把這人作爲補隊兵可也。

我國討論不定方程的除同餘方程外，其餘都是一次方程（如百鷄題，求强弱數等），本題是我國討論到的最早的二次不定方程，故十分重要，以往的人（包括今版的《數書九章》）都不把它當作（二次）不定方程，而人爲地臨時湊上一個條件以求得到定解，這是不足取的。

看來，對秦九韶的成就還有必要進一步的探討。

5. 有關秦九韶的生平

由於對周密所載"秦九韶……年十八在鄉里爲義兵首"一語沒有正確的理解，故以往對秦九韶的生平得不到正確的認識。今按，周密認爲秦九韶是"秦鳳間人"這裡特言其"在鄉里爲義兵首"，而這時（十二世紀後）秦鳳已入於金，秦九韶在秦鳳間爲義兵首顯然是抗金義兵（錢寶琮先生以爲是鎮壓農民起義的地主武裝看來是不對的）。查寶慶二年（1226）與其父特往涪州有涪州石魚題名特記其事，如屬一般的旅游性質不應隆重若此（此類事極少它例），當是秦九韶與李澤民同往參加義兵，故起程之前特記此事。如果此猜測不虛，則 1226 年時秦九韶 18 歲，當生於 1209 年。

據秦九韶自序，"際時狄患，歷歲遥塞不自意存於矢石間，嘗險罹忧，荏苒十祀"，在義兵間共十年（1226～1235）。他之所以結束義兵生涯，根據當時軍事形勢，顯然由於蒙古兵的打擊，義兵戰敗所致，於是由秦鳳路向西退到四川，再退到湖北蘄春，這時受到南宋政府的解散義兵政策，被迫解散。而調爲和縣縣尉，這便是劉克莊所說"梓蘄妄作，幾激兵變，守和販鹺抑賣于民"的由來。到和縣做縣尉不久，便由李劉調臨安作校正官，整理圖書，這時秦九韶纔弃武從文。直到淳祐四年（1244）年秦以通直郎通判建康府，但十一月即丁母憂而解任，大概校正圖書任務既完成便改任通直郎。以後的事迹便可參閱嚴敦傑[4]、李迪[5]兩人的研究。

值得指出，秦九韶一直做曆學教官或一些小地方官，只是寶祐五年（1257）纔投謁賈似道（爲一件訟事），由賈似道推薦於李曾伯，李委他爲瓊州守，不百日即被賈似道手下排擠而去。以後他雖投靠吳潛，但由於賈派的排擠，多次任命都不能赴任。甚至於"已未透渡"（1257 年元兵渡江），他這個義兵首也不能奮起抗戰，反受賈派的人譏爲"喜色洋洋然"，其實因元兵渡江而得勢的正是賈派的人。賈派利用這次機會，打擊吳潛而秦九韶也受其殃，被貶至梅州，於 1262 年左右死於任所。

史料上提到秦九韶的，尤其攻擊秦九韶的話全都出於賈派之口，這些話有多少真實性極值得我們仔細鑒别，參見拙作文[6]。

参考文献

1. 莫绍揆．秦九韶大衍求一術的新研究，《秦九韶與數書九章》，北京：北京師範大學出版社，1987年，180—202
2. 白尚恕．秦九韶測望九問造術之探討，同上，338—353。
3. 李兆華．秦九韶方變鋭陣題解法改正，同上，428—432
4. 嚴敦傑．秦九韶年譜初稿，同上，12—24
5. 李迪．秦九韶傳略，同上，25—42
6. 莫绍揆．關於秦九韶生平及其成就，《自然雜誌》12卷1期(1989)，57—64。

楊輝《詳解九章算法》初探

孔國平
(科學出版社,北京,100707)

本文對《詳解九章算法》的內容進行了探討。首先分析了該書體例,然後闡明載於該書的一條重要的面積定理。文章指出,楊輝對算法的總結提高了數學的一般化程度。他在"以法御題"的思想指導下演繹出新的題型,並開始創立新的數學分支——垛積術。在"纂類"中,楊輝進一步提出要"因法推類",他重新編排《九章算術》中的所有題目,從而增强了數學知識的系統性。

一、《詳解九章算法》的體例

《詳解九章算法》爲南宋數學家楊輝所撰,共十二卷,成書於1261年。據嚴敦傑考證,卷首爲圖,卷一爲乘除,卷二到卷十依次爲《九章算術》卷一到卷九的內容,卷末爲"纂類"[6]。卷首與卷一已佚。現存《宜稼堂叢書》本《詳解九章算法》中含《九章算術》的98題(原書共246題)及"纂類"。因該書中《詳解九章算法》及《詳解九章算法纂類》各自成篇,爲討論方便,下文分別稱之爲《詳解》及《纂類》。

《詳解》是在賈憲《黃帝九章細草》的基礎上寫成的,題目順序遵循《九章算術》,內容包括原題、解題、圖、法(術)、草、比類、注釋等項,其中哪些屬楊輝?哪些屬賈憲?這個問題應該首先弄清楚。

《詳解》中的楊輝序稱:"恐問隱而添解題,見法隱而續釋注,刊大小字以明法草,僣比類題以通俗務。"[1] 由此可見,解題、釋注(除劉徽及李淳風注外)及比類均爲楊輝所撰。至於法和草,楊輝只云"刊大小字",實際上是法和草用大號字,解題、釋注、比類用小號字。考慮到該書以賈憲的《細草》爲本,法和草的主要作者應是賈憲。但楊輝也給出一些新法,例如"均輸"章第十九題①(即"九節竹"題)的解題中說:"求逐節之差術意頗隱,未可施於初學,今重修於後。"重修的法顯然爲楊輝所撰。

《詳解》中的圖是誰畫的呢?雖不能斷定全部屬楊輝,但據序言所說"凡題法解白不明者別圖而驗之",至少應認爲大部分圖是楊輝畫的,其作用與釋注一樣。圖文并茂,相得益彰。已失傳的卷首之圖大概是總圖,就象《四元玉鑒》的卷首之圖那樣。而各題的附圖理應與題在一起。如"勾股"章第一題的注文中說"立圖而驗之",圖與注顯然構成一個統一的整體,都是楊輝的工作。再如"勾股"章第十五題後的解題中說"右題勾五股十二答容方三步十七分步之九,有分子難驗其圖",於是根據"勾六步股十二步"畫圖明之。既然解題爲楊輝所作,而圖恰在解題中言到,則必爲楊輝所畫。這種圖正是爲解題服務的。

"解題"在《詳解》中十分重要,常常起到畫龍點睛的作用,使讀者迅速抓住問題的要害。楊輝的解題大體可分爲三類:

1. 提煉數學模型。例如"方程"章第八題:"今有賣牛二、羊五,以買一十三豕有餘錢一千;賣牛三、豕三,,以買九羊,錢適足;賣六羊、八豕以買五牛,錢不足六百,問牛羊豕價各幾何?"解題中說:"賣爲正數,買爲負數。"這實際是把日常生活中的"買與賣"提煉爲數學模型——"正與負",以便用正負數運算法則解之。這種從具體到抽象、從特殊到一般的飛躍,體現了數學的本質。只有經過這

① 本文的題號依錢寶琮校點《九章算術》,見文獻[4]。

種飛躍，纔能用固定的數學方法解决各種各樣的實際問題。再如"勾股"章第六題："今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，適與岸齊，問水深葭長各幾何？"解題："半池方如勾，水深如股，引葭平水如弦，出水一尺如股弦較。"此題是把水深葭長等抽象爲勾股形，從而可用勾股定理解之，如圖 1。

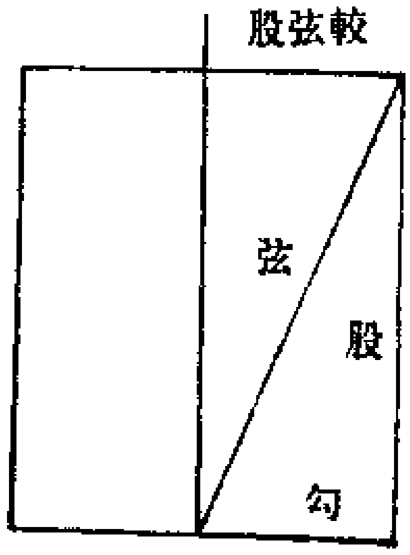


圖 1. 引葭上岸圖

2. 提示算法難點。如"勾股"章第十六題："今有勾八步，股一十五步，問勾中容圓徑幾何？"解題："圓徑與弦和較數等。"①

3. 解釋原題中的數學名詞，如"商功"章第十一題："今有圓亭下周三丈，上周二丈，高一丈，問積幾何？"解題："上周小，下周大，有高爲臺，形如造餅爐，若倒之，如圓窖也。"再如"商功"章第十四題："今有塹堵下廣二丈，袤十八丈六尺，高二丈五尺，問積幾何？"解題："一立方斜解兩段，形如屋脊。"

《詳解》中的圖也很重要，是該書的顯著特色。《宜稼堂》本內有圖 33 幅，這些圖可分兩類：數學圖和爲學數學服務的寫生圖。

數學圖的作用在於使數學理論形象化，便於讀者理解。例如"勾股"章中的勾股弦圖，便表明了直角三角形三邊之間的關係(圖 2)。

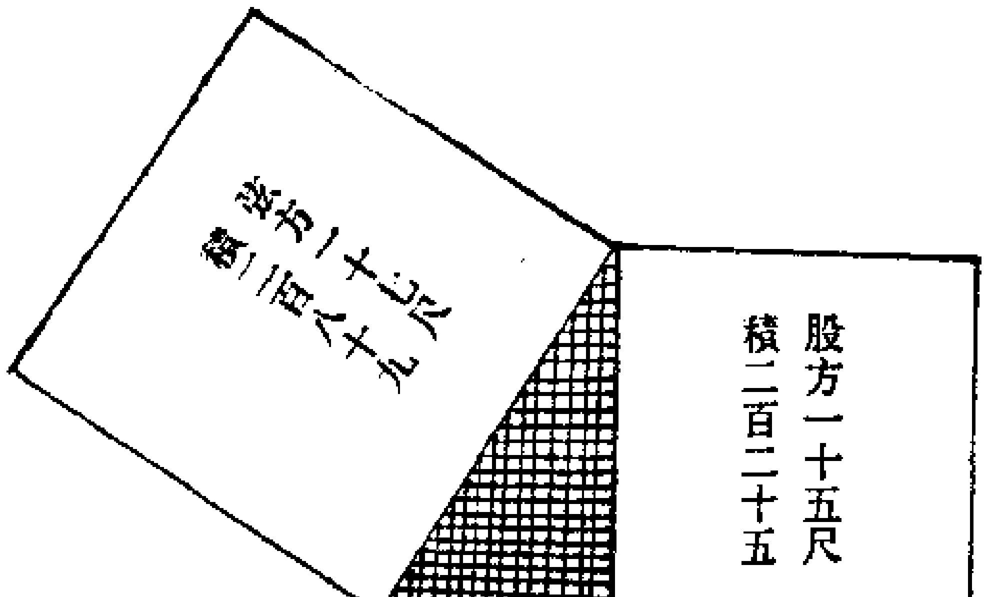


圖 2. 勾股弦圖

寫生圖在幫助讀者理解題意的同時，還能引起讀者興趣。如葭出水圖、圓材埋壁圖、方邑圖等，都很精美，爲《詳解》增色不少。這種作法體現了楊輝寓美於數學的思想，有利於數學知識的普及。

二、一條重要的面積定理

《詳解》"勾股"章第十五題之後，楊輝畫勾股容方圖如圖 3，並指出："容方白積十六與容直黑積十六等。"這實際上是一條重要的面積定理的雛型。在 1275 年成書的《續古摘奇算法》中，楊輝給出明確的表述："直田之長名股，其闊名勾，於兩隅角斜界一綫，其名弦。弦之內外分二勾股，其一勾中

① 設勾 a，股 b，弦 c，圓徑 d，則 $d=(a+b)-c$。

容横，其一股中容直，二積之數皆同。" 如圖 4，横指矩形 BE，直指矩形 DE。

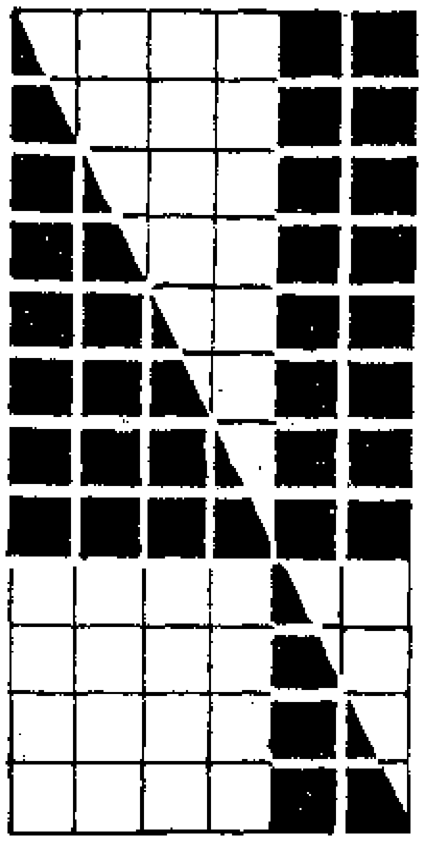


圖 3. 勾股容方圖

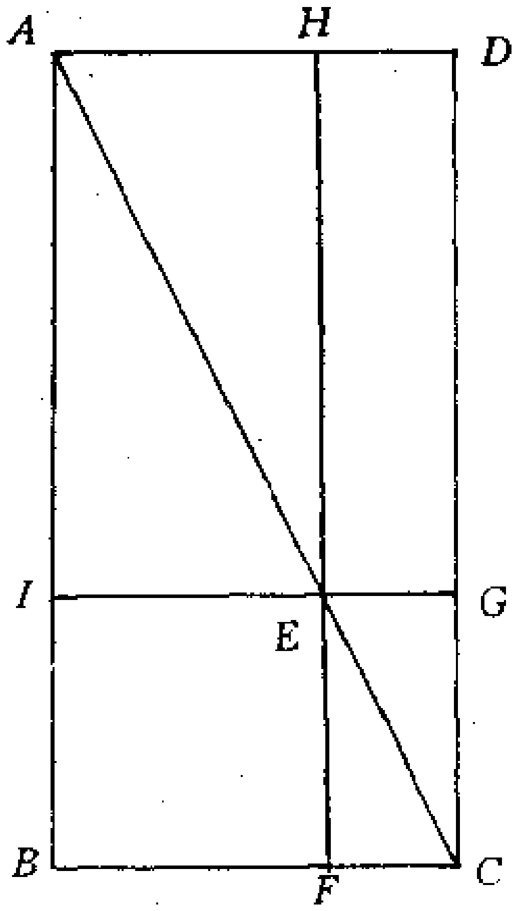


圖 4. 面積定理圖

該定理的基本思想，已爲劉徽、趙爽掌握，但首次表述成定理形式的是楊輝。《詳解》中説："大小二勾白積與大小二勾黑積等。" 這種關係反映了我國傳統幾何中的出入相補原理。實際上，相應的黑積可以移置白積處，也就是説：$\triangle AIE$ 可以移置 $\triangle EHA$ 處，$\triangle EFC$ 可以移置 $\triangle CGE$ 處，所以等積，這裡隱含着全等圖形面積相等的思想。由此推測，楊輝對該定理的證明思路如下：

因爲　$\triangle ABC = \triangle CDA$（指面積相等，下同）

又因爲　$\triangle AIE = \triangle EHA$，

$\triangle EFC = \triangle CGE$，

所以　$\triangle ABC - \triangle AIE - \triangle EFC = \triangle CDA - \triangle EHA - \triangle CGE$

即　$\square BE = \square DE$

這一定理在平面幾何中有廣泛的應用。例如："假如竿不知高，從竿脚量遠二十五尺，立一丈表。表後退行五尺，用窺穴望表，與竿齊平，其人目窺穴高四尺，問竿高幾何？"[2] 此題即已知 $BF = 25$，$NE = 10$，$FC = 5$，$CM = 4$，求 AP（見圖 5）。依術列式，則

$$EF = EN - CM = 10 - 4 = 6。$$

因爲　$BF \times EF = DG \times EG$，

所以　$DG = \dfrac{BF \times EF}{EG} = \dfrac{25 \times 6}{5} = 30$

所以　$AP = DG + EN = 30 + 10 = 40$

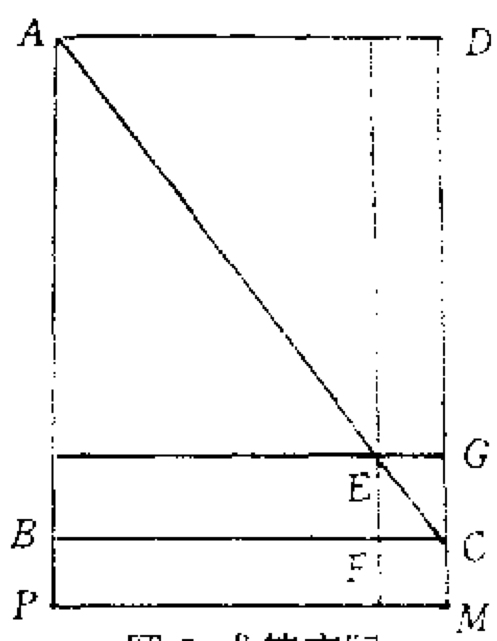


圖 5. 求竿高圖

三、楊輝對算法的研究

楊輝在《詳解》序言中指出："夫習算者，以乘法爲主。"這一見解是很精辟的。用現代觀點來看，除法是乘法的逆運算，可還原爲乘；而乘方即連乘，開方中的基本運算也是乘。熟悉了乘法，其他算法便可迎刃而解。楊輝研究了各種常用算法，歸納爲："題有分者，隨母通之；母不同者，齊子并之；田不匠者，折并直之；數皆求者，互乘换之；差等除實，别而衰之；錯糅爲問，正負入之；勾股旁要，開方除之；節題匿積，演段取之。"其中包括通分、齊同、出入相補、比例算法、衰分法、商功與垛積術、盈不足術、綫性方程組解法與正負術、開方術、演段法等，可以説概括了當時普及性算法的絶大部分，故楊輝説："此算法之盡理也。"在對算法的敘述上，楊輝所用術語比《九章算術》更接近現代語言。例如《九章算術》中的正負數加减法則分别寫作"異名相除，同名相益"和"同名相除，異名相益"，楊輝則改爲"異名相减，同名相加"和"同名相减，異名相加。"

楊輝對算法的概括，其抽象化、一般化程度超過《九章算術》原術。例如，"方程"章的原術都是對具體題目而言，楊輝則在本章末的"總説"中給出綫性方程組的一般解法："方程以諸物總并爲問，其法以减損求源爲主，去一存一以考其數。如甲乙行列諸物與價，術以甲行首位遍乘其乙，復以乙行首位遍乘其甲。求其有等，以少行减多行，是去其物减其錢，見一法一實，如商除之，行位繁者次第求之。"可見楊輝善於從具體題目的算法中歸納出一般方法。這種歸納，實際是演繹的基礎。這裡從特殊到一般，而在"比類"及《纂類》中，則是從一般到特殊。

四、以法御題

在《詳解》的"比類"中，楊輝以法御題，由一般方法演繹出新的題型，即在各種解法之後給出該法所適用的若干性質相近的題目。例如"商功"章，在圓亭（圓臺）解法之後便演繹出一道圓窖題："圓窖上周三丈，下周二丈，深一丈，問積。"由於圓窖可看作倒立的圓亭，兩者的解法是一致的。陽馬①術後的比類中雖未給出新題，但楊輝在分析了陽馬與方錐②的聯係後指出"題法全類方錐"，即可由方錐體積求法推出各種棱錐的體積。

引人注目的是，楊輝在"以法御題"的思想指導下，開始創立新的數學分支 —— 垛積術。數學史上，任何一個新的數學分支都是從原有數學中脱胎而來的。在中國，獨具特色的組合數學 —— 垛積術，便是由立體幾何中的多面體體積問題脱胎而來。雖然隙積術爲沈括所創，但他的隙積③術僅僅是垛積術的一類。而在楊輝這里，垛積術得到比較全面的發展，已經形成一個數學分支的雛型。

楊輝的垛積術，是以"比類"的形式置於"商功"章的，這顯然是受了沈括思想的影響。沈括的隙積術便建立在比較隙積與芻童④異同的基礎上。楊輝則進一步認識到垛積術與各類多面體體積公式的聯係，由多面體體積公式導出相應的垛積術公式，作爲前者的"比類"。雖然《詳解》中未留下垛積術的推導過程，但楊輝在方亭⑤、方錐、塹堵⑥、鱉臑⑦、芻童等題後分别給出相應的垛積問題及其公式，這就充分説明二者有内在聯係。例如"方亭"題："今有方亭，下方五丈，上方四丈，高五丈，問積幾何?…… 術曰上下方相乘，又各自乘，併之，以高乘之，三而一。""比類：方垛上方四個，下方九個，高六個，問計幾何?…… 術曰上下方各自乘，上下方相乘，本法。上方减下方，餘半之，相并，以高乘，三而一。"依術列式，設方亭上下底分别爲 a，b，高爲 h，則方亭體積

① 陽馬即底面是長方形且有一條棱垂直於底面的四棱錐。
② 方錐即正四棱錐。
③ 隙積即積之有隙者，如累棋、層壇之類。
④ 芻童即上下底面都是長方形的棱臺。
⑤ 方亭即正四棱臺。
⑥ 塹堵即底面是直角三角形的直棱柱。
⑦ 臑，naò，牲畜前肢。鱉臑指底面是直角三角形、且有一條棱垂直於底面的三棱錐。

$$V=\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab) \tag{1}$$

若由大小相等的物體垛成類似於方亭的方垛，上底由 $a\times a$ 個物體組成，以下各層的長、寬依次各增加一個物體，共有 n 層，最下層(即下底)由 $b\times b$ 個物體組成，楊輝給出求方垛中物體總數公式如下：

$$S=\frac{n}{3}(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}) \tag{2}$$

比較一下(1)(2)兩式就會發現，方垛求和公式與方亭求積公式的區別就在於括號內多了一項 $\frac{b-a}{2}$，故楊輝把這項以外的式子稱爲"本法"。(2)式實際是一個高階等差級數求和公式，即

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(b-1)^2+b^2$$
$$=\frac{n}{3}(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2})$$

類似地，楊輝在"方錐"的比類中給出

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n}{3}(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

在"鱉臑"的比類中給出

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$$

在"芻童"的比類中給出

$$a.b+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)$$
$$+\cdots+(c-1)(d-1)+c.d$$
$$=\frac{n}{6}[(2b+d).a+(2d+b).c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

上述四個垛積術公式(二階等差級數求和公式)中，除最後一個與沈括隙積術相同外，其他三式均爲楊輝獨立推出。另外，"塹堵"比類中的垛積(屋蓋垛)雖不是等差級數，但它作爲垛積系統中最簡單的一類，仍然是有意義的。它説明若垛積每層個數相同，則可用相應的求積公式來求和。本題即用塹堵求積公式求屋蓋垛之和。

五、因法推類

在《纂類》中，楊輝進一步發展了以法御題的思想，明確提出要"因法推類"。正如郁松年在後記中所説，《纂類》以"算法爲綱"，"以類相從。"這種類從思想在中國數學史上是源遠流長的。春秋戰國時代成書的《周易》及《墨經》都强調"類"。如《周易·繫辭下傳》："於是始作八卦，以通神明之德，以類萬物之情。""其稱名也小，其取類也大。"《墨經·經説上》："有以同，類同也。…… 不有同，不類也。"《墨經·大取》："夫辭，以故生，以理長，以類行者也。"到了漢代，《周髀算經》提出"類以合類"的原則，《九章算術》及劉徽的注釋都體現了這種思想。雖然《纂類》中没有直接引用《周易》的原文，但考慮到楊輝對分類的重視及《周易》對宋元社會的影響，特别是考慮到楊輝曾引用過《周易》中的"引而伸之，觸類而長"[3]，他在撰寫《纂類》時很可能受到《周易》的類概念的影響。由於楊輝是在研究《九章算術》基礎上寫成《纂類》的，所以他受到《九章》分類思想的影響，這一點毫無疑問。

但《九章算術》的分類標準并不一致，有的按用途分，有的按算法分。楊輝則按算法的不同，將《九章算術》中所有題目分爲乘除、互换、合率、分率、衰分、叠積、盈不足、方程、勾股九類。每一類中，楊輝由總的算法演繹出不同的具體方法，又由具體方法推出相應的習題。例如，"方程"類便依次給出方程、損益、分子、正負四法。"方程法曰：所求率互乘鄰行，以少減多，再求減損，錢爲實，物爲

法，實如法而一。"顯然，這是解綫性方程組的基本方法。此法後的 11 題全是基本類型，可直接列出最簡方程組。"損益"指的是移項及合并同類項，此法後列有需要合并同類項的兩個方程。分子術指去分母的方法，正負術指方程變換時所用的正負數運算法則，各法後也分別列有相應的具體題目。這種作法體現了由幹生枝的演繹思想，正如劉徽所說："枝條雖分而同本幹。"[5] 在楊輝這里，方程法是幹，損益、分子、正負三法是枝。這種演繹思想從"勾股"類中可以看得更清楚。此類共 38 問，分別置於 21 種方法之後，從勾股定理的基本形式"勾股求弦法"(即"勾股各自乘，并而開方除之")出發，依次推出各種復雜的勾股問題解法。例如"股弦和與勾求股法曰：勾自乘爲實，如股弦和而一，以減股弦和，餘半之爲股。竹高一丈，折梢拄地，去根三尺，問折處高幾何?"此題即已知 $b+c$ 和 a，求 b，依術列式，則

$$b=\frac{1}{2}\left(b+c-\frac{a^2}{b+c}\right) \tag{1}$$

此式很容易用勾股定理驗證：

$$\begin{aligned}
右 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{b+c}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2++2bc+c^2-a^2}{b+c}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2+2bc+a^2+b^2-a^2}{b+c}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2b(b+c)}{b+c}\\
&= b = 左
\end{aligned}$$

雖然楊輝書中未留下(1)式的推導過程，但該法以勾股定理爲依據，則是無疑的，而法後的習題又以該法爲依據。

總之，楊輝的"因法推類"是一種演繹思想，是在《詳解》中已經表現出來的以法御題思想的發展。所謂"因法推類"包含兩層意思，一是由一般方法推出各類具體方法，二是由具體方法推出它所適用的同類題目．楊輝在這種思想指導下重新整理《九章算術》的所有題目，增强了數學知識的系統性和一般性。

參考文獻

1. 楊輝．《詳解九章算法》，《宜稼堂叢書》本，1842。
2. 楊輝．《續古摘奇算法》，《叢書集成初編》本，1939。
3. 楊輝．《田畝比類乘除捷法》，《叢書集成初編》本，1939。
4. 《九章算術》，見錢寶琮校點《算經十書》，北京：中華書局，1963。
5. 劉徽．"九章算術注序"，見錢寶琮校點《算經十書》，北京：中華書局，1963。
6. 嚴敦傑．"宋楊輝算書考"，見《宋元數學史論文集》，北京：科學出版社．1966。
7. 郭書春．"賈憲《黄帝九章算經細草》初探"，《自然科學史研究》，第 7 卷第 4 期，1988。
8. 孔國平．"楊輝"，見《中國古代科學家傳記》，北京：科學出版社，1992。

李子金《天弧象限表》研究

高宏林
(河南教育學院數學系,鄭州市)

本文從內容簡介幾個問題研究、主要成就以及在我國三角學發展史上地位和作用等四個方面對《天弧象限表》進行初步研究,並指出:1、它內容全面、精確度高,是對西洋傳入《割圓八綫表》的一個簡化與改進;2、書中"徑背求弦新法"是李子金獨立研究的三角函數表計算公式;3、本書體現了李子金的中西會通數學思想,在清初數學發展史上佔重要地位。李子金(1622—1701年),名之鉉,字子金,號隱山,清初布衣數學家,河南柘城人。《天弧象限表》是他的重要數學著作之一,載入叢書《隱山鄙事》十二卷中。

一、《天弧象限表》的主要內容

《天弧象限表》於1683年刊行,全書止一卷,除序言和一個割圓八綫圖外,其餘分十七個部分叙述。象限表約四千五百字,佔全書的三分之一。其它部分主要論述以下幾個問題:1、本書的宗旨是對西洋割圓八綫表進行簡化與改進;2、對表的使用方法作出交待和說明。表中止列正弦、餘弦兩函數值,利用同角三角函數關系可求出其餘三角函數值。另外,因表中所給度數止到10分,這樣,對表中所無函數值可用綫性插值法公式求得;3、給出解三角形的主要方法。解三角形主要利用正弦定理,而對於餘弦定理,采用把角分成鈍角和銳角兩種情況化歸勾股定理處理。對於所需解的三角形分爲兩種類型:其一是已知一角兩夾邊求其餘邊與角;其二是已知一邊及兩角求邊與角。其它情況可轉化爲這兩種方法解决。"任三角形千變萬化,但執此二法以御之,則用矩之道也。"[1]4、給出求正弦、餘弦函數的兩個近似公式,以備測量時在無三角函數表情況下也可以進行數據計算;5、給出一個徑弦求背近似公式,在勾股測量時可以計算所測角度。在無象限儀情況下實爲一個可行的良法。

二、對《天弧象限表》幾個問題的研究

筆者對《天弧象限表》中幾個問題作了初步研究,有如下膚淺看法:

1. 書名"天弧象限表"由來。《天弧象限表》實質上仍是三角函數表。因爲該書中止列正弦和餘弦 兩種函數值,與《割圓八綫表》中列出六個函數值有所不同,爲區別起見,另給一個名字"天弧象限表"。其實,李子金在該書序言中對這個問題已經說得很清楚了。他說:"割圓雖云八綫,舊表止載六綫,予復於六綫之中止載兩綫,其不仍以'割圓八綫'命表,而以'天弧象限'命表者。蓋因其與八綫之實不相副而變易其名耳。"另外,李子金之所以用"天弧象限"這個名字,而不用其它名詞,恐怕與當時三角函數表主要用於天文觀測也有一定關係。

2. 著作年代。《天弧象限表》卷首有李子金本人寫的序言,最後落款時所寫的日期是"康熙癸亥夏五月",說明本書是1683年刊行的。但是,李子金在其所著《算法通義》卷五中論及"徑背求弦新法說"、"徑背求弦法可代八綫表"和"徑弦求背法可代象限儀"時,最後都有"詳見《天弧象限表》"這句話。特別是在"諸法相較"一節中,爲了比較授時曆、三差法、四差法和求弦法計算三角函數值的精確度,列出1°—90°每隔10度的10個數據計算結果,都是與象限表中數據相比較。因爲《算法通義》在1676年刊行。所以,從以上兩點足以說明本書著作年代應在1676年以前,至遲是1676年。

3. 造表方法。我們認爲《天弧象限表》中數據是直接取自《割圓八綫表》，不是由李子金自己創造公式計算的。理由是這樣的：其一，縱然《天弧象限表》中度是按100分折算，不是60分進位，但該表中10、20、…，100分函數值與《割圓八綫表》中6′、12′、…，60′函數值分别相同；其二，李在《算法通義》卷五中討論他所創立的幾個公式精確度時，都與象限表相比較，並且數據都有誤差。對這個問題，李子金本人已說的非常明白："《天弧象限表》乃予本西洋之八綫而約略者，其數從比量而得，稱爲最密，故以表爲主，而諸法皆以此較其疏密。"[2]

4. 版本流傳。《天弧象限表》最初刊印是1683年。就目前所了解到的情况看，止有一本初刊本藏在李子金十代孫、河南省柘城縣皇集鄉後羅李村李傳家家中。柘城縣文化館藏有1979年12月李繼光的抄本。中國科學院自然科學史研究所圖書館藏有李儼先生的抄本，其它版本或抄本尚未發現。

三、李子金在《天弧象限表》中主要研究成就

《天弧象限表》是李子金在西洋《割圓八綫表》基礎上，又結合自己的研究成果匯集而成。他的主要研究成就是：1. 對西洋《割圓八綫表》進行改進。

西洋《割圓八綫表》於明崇禎四年(1631年)傳入我國。該表載有正餘弦、正餘切、正餘割六種三角函數綫，數值達小數點後五位，每分有數，秒以下以比例算得。李子金對它作了三方面改進：(1)止用正弦、餘弦兩函數綫，其餘函數綫可以此推得；(2)止列出0°到45°的值，後45°之值由相餘關係在表中直接看出；(3)度析百分，小數點後五位，每10分有值，其餘未列數值亦用比例算得。李子金談及這種改進的理論根據時指出："按天弧之大小不等，則弧弦之長短不一，其不可以算數求者，止在此正弦之一綫耳。既有正弦便有餘弦；既有正餘兩弦便有切割之兩綫，而兩矢又在兩弦之中，是一綫得而八綫即從而俱得，如是則於八綫之中止表正弦之一綫足矣。然正餘相求必須用勾股開方之法，然後可得。今考前四十五度之正弦即後四十五度之餘弦；後四十五度之正弦即前四十五度之餘弦，與其用四十五度之一弦多一開方，又不若用四十五度之兩弦省一開方也。"[1]這就是說，根據同角三角函數之間的關係，止用正弦一個函數即可。但是又考慮到正餘弦函數的相餘關係，由正弦求餘弦要多一開方運算，比較麻煩，所以改用零到四十五度的正餘弦函數最爲恰當。

這樣改進後有以下幾個優點：(1)節省篇幅，便於實用。該表於"八綫表中止取正餘弦兩綫，其它可以此推算，故爲法甚捷而爲用甚便。"[1]篇幅大爲減少，"舊表九十餘頁，爲文十有餘萬而不見其多；今表不過七頁半，爲文不過數千而不見其少。"[1](2)計算簡便，精確度高。舊表度以60進位的弊端是"不止難於布算，而其數於疏。"[1](3)避開復雜運算，減少計算量。前面已經說過，根據同角三角函數之間的關係，止用正弦一綫即可求出其餘七個函數綫。當由正弦求出餘弦綫後再求其餘六個函數綫，止用四則運算即可，唯獨由正弦求餘弦時要用開方運算。我們知道開方運算要比四則運算麻煩得多。這樣，把餘弦綫也列出，減少計算量是很自然的事。

2、又給出一個三綫表的新設計方案。李子金在《天弧象限表》"予又有三綫之法"一節中又給出一個0°—45°三綫表改進方案。它的大致精神是給出0°—45°的正弦($sinA$)、正割($secA$)和餘切($ctgA$)三個表。這樣在前45°中可以利用同角三角函數之間的關係式：$tgA = sinA \cdot secA$，$cosA = sinA \cdot ctgA$，$cosecA = secA \cdot ctgA$求其餘三個函數值。又根據互餘關係明顯看出，給出前45°的正弦、正割及餘切，相當於給出後45°的餘弦($cosA$)、餘割($cosecA$)和正切(tgA)。當然，也可以用以下公式求其餘三個函數值：$ctgA = cosA \cdot cosecA$，$sinA = cosA \cdot tgA$，$secA = cosA \cdot tgA$。

這種設計方案的好處是：(1)比起《割圓八綫表》省一半的篇幅；(2)比起《天弧象限表》，止用乘而不用除，計算量又可大爲減少。

3、給出兩個同角三角函數之間的關係式。在羅雅谷(1590—1638年)所撰寫的《測量全義》中有五個同角三角函數間的關係式：$sinA \cdot cosecA = 1, cosA \cdot secA = 1, tgA \cdot ctgA = 1, tgA = sinA/cosA, ctgA = cosA/sinA$，另外，$sin^2A + cos^2A = 1$ 已爲人們所熟知。李子金在《天弧象限表》"用切割兩綫之法"中指出："…以半徑、切綫各自乘，二數相併，平方開之，則得割綫。"雖然止一句話，但實際上給出兩個同角三角函數關係式：$sec^2A = 1 + tg^2A, cosec^2A = 1 + ctg^2A$。

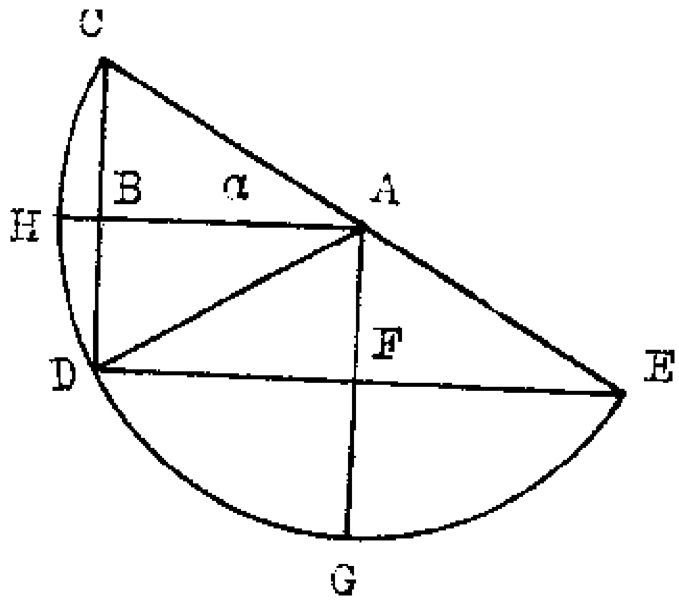
4、給出中西象限互換關係。李子金在"中西象限之數不同"中給出中西象限互換數據。要使本表對中西計算都可通用，只要把中西所用度的單位互相換算關係搞清楚即可。西洋一個象限爲 90 度，而我國一個象限是 91.314 度(一周天按 365.256 度計算)。這樣，西洋一度等於中數 0.9856 度；中數一度等於西數 1.01456 度。有了這兩個數據，具體計算時就可運用自如，得心應手。

5、給出求正弦和餘弦兩個近似計算公式。李子金在本書"徑背求弦法可代象限表"中給出求正弦和餘弦函數值的兩個近似計算公式。設所給的角爲 A(以度爲單位)，圓的直徑 d 爲 20 尺，則與 $2A$ 所對圓弧長 $l = \frac{2A \cdot 3.141}{180°} \times 10$，餘弧長 $l' = \frac{3.141 \times (180° - 2A)}{180°} \times 10$。這樣，李子金計算正餘弦函數近似計算公式分別爲：

$$sinA = \frac{1}{2}\sqrt{l'^2 - [(l^2 + l'^2 - d^2]\frac{l'^2 + l'^3 + l'^4/2}{(l^2 + l^3 + \frac{l^4}{2}) + (l'^2 + l'^3 + \frac{l'^4}{2})}} \div \frac{d}{2} \tag{1}$$

$$cosA = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - [(l^2 + l'^2) - d^2]\frac{l^2 + l^3 + l^4/2}{(l^2 + l'^3 + l'^4/2) + (l'^2 + l^{13} + l^{14}/2}} \div \frac{d}{2} \tag{2}$$

6、給出一個利用勾股測量計算角度近似公式。李子金在本書"徑弦求背法可代象限儀"一節中給出一個利用兩表(杆)所測數據計算角度的近似公式。如圖所示，在實地測量角度時，先在 A、B 兩處各立一表(杆)，可以測出 BC、AB 之長，再利用勾股定理計算出 AC 之長，然後通過這些數據計算出角 α 的度數。計算角 α 的方法是：先完成半圓 $ACHDGE$，設 $CE = d, CD = a, ED = b, HB = e, FG = f$，弓形 CHD 的面積爲 M，弓形 DGE 面積爲 N，則 $BC = \frac{a}{2}$，$DF = \frac{b}{2}, b^2 = d^2 - a^2, e = \frac{d}{2} - \frac{b}{2}, f = \frac{d}{2} - \frac{a}{2}$。又令 $e(3a + e) = x, f(3b + f) = y$，而 $M + N = \frac{\pi}{2}(\frac{d}{2})^2 - \frac{ab}{2}$，則 $M = \frac{[\frac{\pi}{2}(\frac{d}{2})^2 - \frac{ab}{2}]x}{x + y}$，$N = \frac{[\frac{\pi}{2}(\frac{d}{2}) - \frac{ab}{2}]y}{x + y}$。這樣，扇形 $ACHD$ 面積 $= M + \frac{ab}{4}$，扇形 $ADGE$ 面積 $= N + \frac{ab}{4}$，角 α 的度數可以通過如下公式計算：



$$\alpha = 180° \frac{4M + ab}{\pi d^2}. \tag{3}$$

用這種方法所計算的結果比直接用象限儀測量精確度高，同時，也爲在無象限儀情況下測量角度提供一個切實可行的方法。

四、《天弧象限表》的主要特徵

本書的主要特徵是：

1. 簡便易行，務求實用。簡便易行，務求實用是李子金寫這本書的中心思想，也是本書的突出特點。主要表現在：(1) 把《割圓八綫表》中六個函數綫減爲正餘弦兩個函數綫，篇幅由原來的九十七頁壓縮爲七頁半。析度百分，易於布算，精確度較高。李子金這次改革也是下了很大决心，並且還冒一定風險。正如他在本書序言中所説的那樣，"於文則與繁而寧儉；於用則與疏而寧密。雖冒更張襲取之譏，在所不辭也。"(2) 創立"徑背求弦新法"可以代替象限表。在無象限表的情况下進行測量有法可依，以便應急。李子金在談及創立這一方法目的時，直截了當地説："諸法之中惟八綫表爲最善，但每遇一數必須携表自隨，以備查考，未免稍贅。予創立新法布算，雖多曲折，而得數亦云近密。"[2] 李子金對他所創立的新方法非常欣賞。當談到此法與八綫表相比較時情不自禁地稱它"較八綫表爲獨巧；較三差法則更切，蓋於無法中求爲有法，不謂之神奇亦不可也。"[3] (3) 自制象限儀測角，並用徑弦求背法代替象限儀。當時，從西洋傳入象限儀很少，爲滿足日益增長的測量事業需要，自制象限儀是行之有效的方法。李子金提出用銅板或堅木板制造象限儀，在那時的生産技術水平條件下可以做得到。用兩表(杆)進行測量，用近似公式計算角度，這種出自實用的動機是非常明顯的。

2. 内容豐富，涉及面廣。雖然説《天弧象限表》是對西洋《割圓八綫表》的簡化和改進，但是，從它的整個内容看，不僅是一個三角函數表，更重要的是還包括測量方面所需基本知識。内容豐富，涉及面廣，的確是一本便於携帶，適合於室外作業，測量人員必備的三角學實用手册。正是由於這種原因，所以用它可解决一般測量問題。當然李子金也認爲比較完備，在評價自制象限儀時直言不諱地説："以象限儀之度測之，以象限表之數推之，而後天之高，星辰之遠以及一切方圓三角等形無不可得而知矣。"[1]

3. 兼收並蓄，中西會通。明末清初，由於曆法改革中西之争日趨激烈化，這就更加促使學者們在認真學習研究西方傳入數學與天文學的同時，也要認真研究中國自身傳統數學與天文學，於是便出現一個中西數學會通時期。李子金生活在這樣一個大氣候中，不可避免要打上時代的烙印。他的這本著作很自然地要體現中西會通時代研究風格。這可以從以下幾個方面看出：(1) 書中把度的劃分，一改西洋六十分爲中國傳統的一百分，計算方便，數據精密，吸收了中國傳統數學的長處和優點；(2) 給出中西象限表换算關係，可以使中西三角學融爲一體，互相通用；(3) 徑背求弦新法是李子金深入研究西洋數學以後，利用我國古代數學中"衰分術"所得出的嶄新結果，具有顯著的傳統數學特點；(4)"徑背求弦法可代象限儀"中計算角度近似公式，是李子金利用"衰分術"所獲得的新成就，也是利用傳統數學中勾股術解决西洋數學問題的一個典型例子。毫無疑問，這一方法無論對中國傳統數學或西洋數學來説，都是有益的補充和發展。因此，中西數學融會貫通的特點在這裡體現得非常鮮明和具體。

五、《天弧象限表》在我國三角學發展史中的地位與作用

我國古代最早的三角函數表，是由印度天文學家瞿曇悉達於唐朝開元六年(718 年) 翻譯印度《九執曆》而傳入的。因爲印度算法與中國傳統算法不同，所以此表在中國没有得到重視和傳播。元朝郭守敬也造有三角函數表，然而他是以乘方取度，故所得結果不精。明朝末年，西洋三角函數表開始傳入中國。1631 年耶蘇傳教士進呈崇禎皇帝的《割圓八綫表》六卷和《測量全義》十卷，其中就有

《割圓八綫小表》和《割圓八綫表》。在《崇禎曆書》中還有《割圓八綫立成長表》四卷以及《割圓勾股八綫表》。進入清朝以後，數學和天文學研究之風更盛。薛鳳祚和穆尼閣同譯《曆學會通》，其中就有《比例四綫新表》一卷。編制三角函數表最詳的要算《數理精蘊》了。李子金《天弧象限表》、年希堯《八綫真數表》一卷和《八綫假數表》一卷以及陳訏《三角割圓八綫小表》都在《數理精蘊》之前。晚清時期有張作楠輯的《八綫類編》三卷和《八綫對數類編》二卷、丁取忠的《八綫對數類編》、賈步緯等譯的《弦切對數表》、《八綫簡表》一卷和《八綫對數簡表》一卷等。縱觀我國三角函數表整個發展歷史，可以看出李子金《天弧象限表》有兩個方面工作比較突出：1. 最簡，《割圓八綫表》雖言八綫，但因正矢、餘矢與餘弦、正弦之間的關係比較簡單，所以，它止列出正餘弦、正餘切、正餘割六綫。薛鳳祚《比例四綫新表》就止列正餘弦、正餘切四綫。李子金更進一步約簡爲正餘弦二綫，篇幅也由《割圓八綫表》的九十七頁减少爲七頁半。這樣簡化，在理論上是正確的，指導思想符合數學研究的基本思路，同時在一般測量中行之有效。2. 計算正餘弦函數公式和測角方法獨特。前面所談到的計算正餘弦函數公式(1)和(2)及測角公式(3)，是李子金通過多年思考和精心推敲而得出的近似公式。西洋傳入的《大測》一書，計算三角函數值主要利用"六宗率"、"三要法"和"二簡法"。它的基本思想是：先計算六個正多邊形邊長，半之，即求出六個角正弦值。然後再用"三要法"求出這六個角的相應餘弦值。進而由"二簡法"可求出一百二十個角的正弦值，其中最小角度爲 45′。清朝初年，楊作枚在其所著《解八綫割圓之根》中，於"六宗率"之外，又算得圓內接正九邊形邊長。《數理精蘊》中又算得圓內接正七邊形邊長。這樣，可算得正弦值三百六十個，其中最小角爲 15′。後來，汪萊、安清翹又立新法，可算得 1′ 角的正弦值。1700 年法國傳教士杜德美來華，帶來了求三角函數值的級數公式。用這種方法計算迅速，精確度高，因而，引起中國學者的極大興趣。清代學者董祐誠，項名達、戴煦、李善蘭、徐有壬、顧觀光都對此進行過深入研究，並獲得許多可喜成果。李子金的方法介於前面兩種方法之間，獨辟蹊徑，走出了一條新路子，構思新穎，方法獨特。李子金之所以要探索新方法，進行改進，我們想，大概是《大測》中方法比較麻煩。這說明中國學者對西洋傳入數學，既不是盲目崇拜，也不是全盤否定，而是持一種對真理執著追求和鋭意探索的科學態度。從某種意義上講，李子金的嚴謹治學態度也代表了中西會通時期我國一代有識之士的精神風貌。

李子金《天弧象限表》雖然比較簡略，但也有不足之處。對於大規模測量，增加了運算程序，不如列出四個函數值爲好。對此，李子金心中也是很清楚的。他曾明確表示，"至於不假算術，展卷即得，則八綫表之功不可沒矣。"

參考文獻

1.（清）李子金．天弧象限表，河南省柘城縣文化館李繼光抄本，1979 年 12 月。
2.（清）李子金．算法通義，卷五，河南省柘城縣文化館李繼光抄本，1980 年 5 月。
3. 李儼．三角術和三角函數表的東來，中算史論叢，第三集，北京：科學出版社，1955 年。
4. 李儼．明清算家的割圓術研究，中算史論叢，第三集，北京：科學出版社，1955 年。
5. 錢寶琮：中國數學史，北京：科學出版社，1981 年。
6. 李迪．中國數學史簡編，瀋陽：遼寧人民出版社，1984 年。
7. 中外數學簡史編寫組，中國數學簡史，濟南：山東教育出版社，1986 年。

數學史研究文集第四輯 47—49 1993 年 7 月

論康熙數學著作《積求句股法》

李培業

(陝西財政專科學校，西安，710061)

愛新覺羅・玄燁(1654——1722)，滿族，清代第二個皇帝，在位六十一年(1662——1722)。他愛好自然科學，對數學和天文尤喜鑽研，是我國歷史上少有的一位數學素養較高的封建皇帝。

康熙因天文學上的一件是非之争而開始發奮學習數學。他説："爾等惟知朕算術之精，却不知朕學算之故。朕幼時，欽天監漢官與西洋人不睦，互相參劾，幾至大辟。楊光先、湯若望於午門外九卿前當面睹測日影，奈九卿中無一知其法者。朕思，己不知焉能斷人之是非，因自憤而學焉！"[1]

康熙聘請一批耶穌會傳教士作爲科學顧問，向他們學習自然科學。他研究數學時，每天都和這些傳教士度過兩三小時。他精通算術和幾何，掌握了很多數學儀器的用法，並親自給數學書撰寫序文[2]。他還召集國内數學家如陳厚耀、梅瑴成、何國宗等到他的身邊，向他們傳授數學知識，和他們一起研究數學，並命他們編輯數學書籍。對當時數學的發展起了巨大的推動作用。

康熙領導着當時數學研究活動，但他自己的數學著作却很少見。北京圖書館藏有《三角形論》，題"康熙御纂"，是目前發現的第一部康熙數學著作[3]。我所藏的《陳厚耀算書》中，有一篇《積求句股法》，因在篇名前加"欽授"二字，故可視爲現存的康熙第二部數學著作。

關於《陳厚耀算書》，我已寫論文作了初步的研究，現對《積求句股法》再專門作些論述[4]。

此篇著作，題爲《欽授積求句股法》，單獨成篇，裝訂在陳厚耀《句股圖解》之前。共 12 頁，每頁 11 行，每行 25 字。係正楷書寫，未發現誤文奪字，是原稿謄正本。

此篇的寫作時間不詳，但可以斷定寫於開始編寫《數理精蘊》(1713 年)之前。在本篇中引用幾何定理"平行四邊形爲對角綫所平分"，指明出自《幾何原本》三卷第四節。經查考係故宫所藏的《幾何原本》節數，而非《數理精蘊》本。故宫《原本》係公元 1690 年譯成，故知其寫作時間在 1713 年前[5]。又陳厚耀的《句股圖解》中説："有積即可以求句股，如前六歸開方之術也"。這裡的"六歸開方之術"是指《積求句股法》中"用法"第二條。故知此篇寫作當在《句股圖解》成書之前。我已考證《句股圖解》寫於 1713 年前，故《積求句股法》亦在 1713 年前寫成。

此篇所解決的問題主要是求解正句股問題。所謂"正句股"就是指與"句三、股四、弦五"句股形成比例的整句股形。

全書所解決的問題，可分五類：

1. 已知正句股和較十三事之一，求句、股。
2. 已知正句股積，求句、股。
3. 已知正句股内容圓徑，求句、股。
4. 已知正句股的句或股，求内容圓徑。
5. 已知句實、股實、弦實之一，或其兩者三者之和，求句、股。

全書内容，可分三部分：

1. 書前首先列出定率，如下表：

句	3	股	4	弦	5	積	6
句股和		7		句弦和	8		

股弦和	9	弦和和	12		
句股較	1	句弦較	2		
股弦較	1	弦和較	2		
弦較和	6	弦較較	4		
容圓徑	2				
句實	9	股實	16	弦實	25

2. 接着寫出兩條"用法"。

(1)"以今所設之數爲實，取定率内與所設數同名之率爲法，法除實得數，以句率乘之得句，以股率乘之得股，以弦率乘之得弦"。

(2)"若所設者爲積數，以積率六除之，平方開之，得數。再以句、股、弦各率乘之，即得句、股、弦之數。

3. 然後，舉出二十三個問題進行解答。我們選出兩題錄如下，以見一斑。

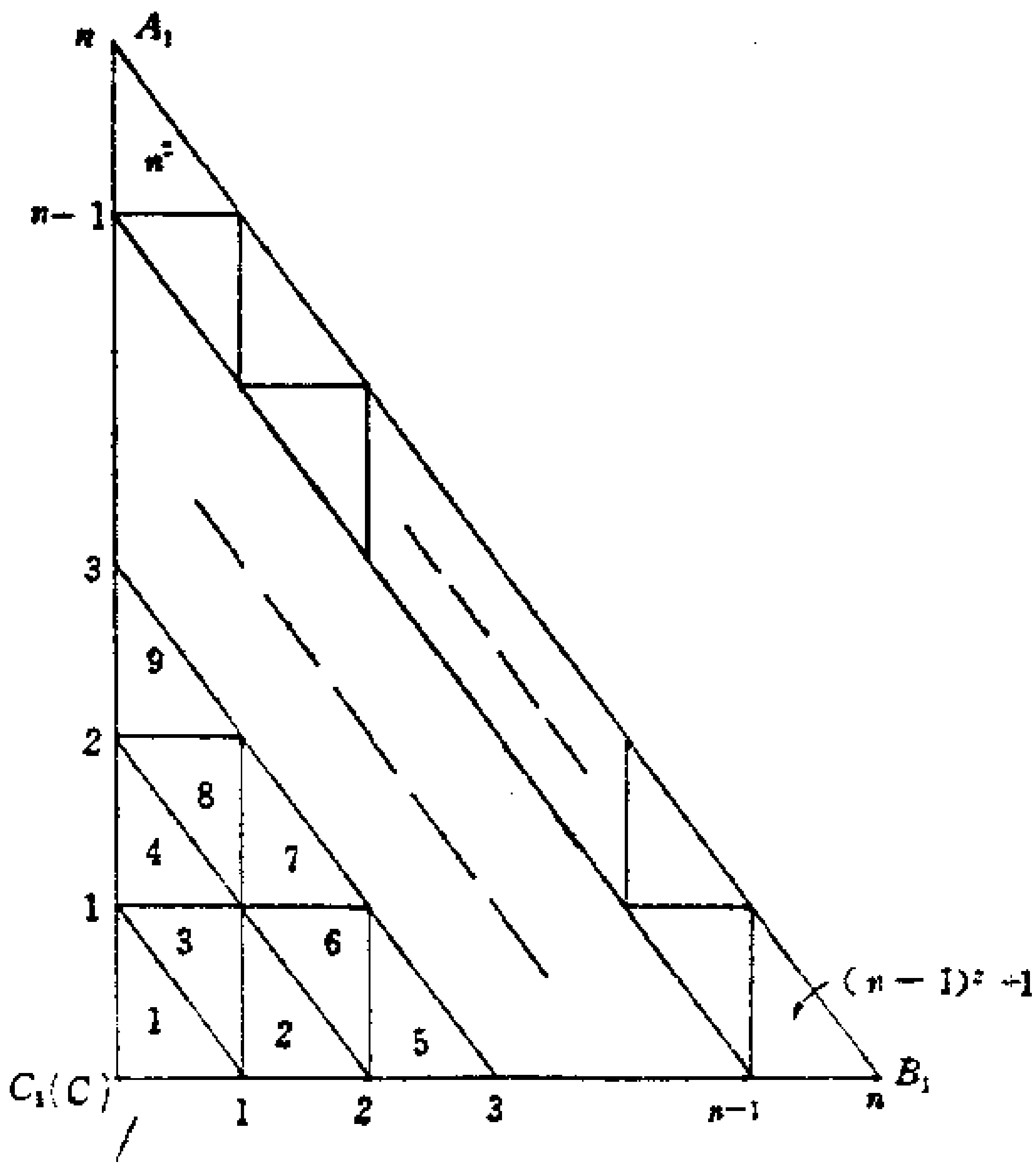
(1)"句股較二尺，求句、股、弦"。

"置句股較二尺，以句股較定率一除之，仍得二。乃以句率三乘之，得句六尺；以股率四乘之，得股八尺；以弦率五乘之，得弦一十尺"。

(2)"有弦實一百尺，求股。"

"置弦實一百尺，以股實率十六乘之，得一千六百尺。又以弦實率二十五除之，得六十四尺。平方開之，得股八尺。"

"解曰：弦實内兼有句、股兩實，而股應得二十五分之十六，句應得二十五分之九。今欲求股，故



以股率乘之，弦實除之而得股實。故開方得股也”。

《積求句股法》的內容相當於《數理精蘊》下編卷十三“正句股比例”一節[6]。細考之，其解法却有不同之處。前述兩條用法，第一條是用來解決已知正句股的十三事之一去解句股形。《數理精蘊》以當時傳來的西洋數學中四率比例解之，此則仿《九章》粟米之法，先列出各比率數，然後以今有術解之。祗因此處所求，爲正句股邊長之和較，以“定率”除之，皆能除盡，故采取先除後乘，與“今有術”中先乘後除者不同而已。第二條“用法”是解已知積求句股的問題。《數理精蘊》中用了《幾何原本》中定理：“同式兩句股形，其面積互相爲比，即同於句股形各相當界所作正方形互相爲比”。以此解釋其理。而《積求句股法》中，則證明獨特，現述如下：

書中有一圖，我們用現代符號代替原圖中符號(如上頁圖)。

設 $\triangle A_1B_1C_1$ 爲所求正句股形，其邊長爲 a_1、b_1、c_1，$\triangle ABC$ 爲句三股四的正句股形，其邊長爲 $a=3$，$b=4$，$c=5$，由圖中可知，若 $b_1=nb$，則 $\triangle A_1B_1C_1=n^2\triangle ABC$　　$n=\sqrt{n^2}=\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle ABC}}$　　$\therefore\ b_1=nb=b\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle ABC}}=4\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{6}}$

同理　$a_1=3\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{6}}$　　$c_1=5\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{6}}$

此即用法中之“以積率六除之，平方開之，得數。再以句、股、弦各率乘之”的意思。這裡直接用面積的演段證明其理，與《數理精蘊》迥異。

從以上對比分析可知，《積求句股法》尚保留有中算特色，而《數理精蘊》則受西方數學影響較大。此種情況在陳厚耀的《句股圖解》中也體現出來[7]。

從《數理精蘊》成書前的這些少量數學書的研究，使我們對當時皇宮數學研究的發展有一個初步的認識，對他們從中算走向西算的過程，有了初步了解。他們對中算都有不同程度的研究，然後在此基礎上去了解西方數學，學習西方數學，最後盡量想使中西數學融合在一起。

此篇所提出的問題，按《九章算術》水平，是完全可以解決的，勿需西算知識。但歷代中算家未單獨研究過正句股形，故陳厚耀視爲了不起的成就，甚贊此法。他說：“謹案隸首作《九算》而終之以句股，非後之也。以其理甚精微，算之不易。其爲術也，必先知二數，方可相求，又多用開方。一遇和較，非帶縱減縱諸法不能御。取數繁重，學者畏之。今用定率法，以乘除代開方。又得一數，即知其他。其神妙簡易，直古今所未發，中西所未有也。《周髀算經》但言句三、股四、弦五，於茲益信”。這種評論，雖然有點過分，但也是實際情況，因爲在此以前，還未對此做過專門研究。

此篇內容經過改編，收入《數理精蘊》之內，由此可以說康熙也參加了《數理精蘊》的編寫工作。

參考文獻

1. 錢穆．敬孚類稿卷 11．故前欽天監監正歙縣楊公神道表引。
2. (法) 白晉著、趙晨譯．康熙皇帝，哈爾濱：黑龍江人民出版社，1981，33—39
3. 李迪．中國數學史簡編，瀋陽：遼寧人民出版社，1984，256
4. 7. 李培業．陳厚耀算書研究，數學史研究文集第三輯，1992，72
5. 錢寶琮主編．中國數學史．北京：科學出版社．1964．268
6. 數理精蘊下編卷十三，光緒八年刊本

正負開方術札記二則

李兆華

（天津師大數學系，天津，30073）

清代中葉的數學家在方程論方面作出卓越的貢獻。汪萊（1768—1813）《衡齋算學》第二册（1798）首先指出，有正根的三次方程可有不止一個正根。稍後，李鋭（1768—1817）《開方説》三卷（1814 年之前成前二卷，1819 年黎應南補成卷下）指出，有正根的方程其正根個數與系數序列變號次數的關係，有實根的方程其實根個數與方程次數的關係。與此相關的問題是方程實根的求法。宋元時期創立的正負開方術原止用於求解方程的一個正根。汪萊和李鋭的上述發現促使正負開方術獲得相應的發展。其中，李鋭的代開法和華蘅芳的數根開方術可爲代表。

一、李鋭代開法

李鋭代開法分爲寄位代開與和較數代開二法。其法求得方程一根後以遞降一階的方程求原方程其餘實根。寄位代開法曰：

“其法以本乘方先開一數，副置先開數加減（同名減，異名加）末商名曰寄位，以其餘遞降一乘開之，所得加減寄位（同名加，異名減）爲又一數。”[1]

以方程 $x^3-151x^2+2838x-14040=0$ 求得三根 130，12，9 爲例，其法可表述如下。爲叙述之便，原文籌碼、竪行、進退玆皆不計而以阿拉伯數碼及横式表之。

1	−151	2838	−14040	100	
	100	−5100	−226200		
1	−51	−2262	−240240		
	100	4900			
1	49	2638			
	100				
1	149				（一）

1	149	2638	−24024	30	
	30	5370	24024		
1	179	8008	0		（二）

1	179	8008	−80		
	−80	−7920			
1	99	88			
	−80				
1	19				（三）

1	19	88	−8	
	−8	−88		
1	11	0		(四)

算式(一)表示

$$x^3-151x^2+2838x-14040$$
$$=(x-100)^3+149(x-100)^2+2638(x-100)-24024$$
$$=0。$$

算式(二)表示

$$(x-100)^3+149(x-100)^2+2638(x-100)-24024$$
$$=(x-130)[(x-100)^2+179(x-100)+8008]$$
$$=0。$$

由此可得 $x=130$ 和關於 $(x-100)$ 的方程

$$(x-100)^2+179(x-100)+8008=0,$$

其中 100 稱爲寄位。

算式(三)表示

$$(x-100)^2+179(x-100)+8008$$
$$=[x-100)+80]^2+19[(x-100)+80]+88$$
$$=0。$$

算式(四)表示

$$[(x-100)+80]^2+19[(x-100)+80]+88$$
$$=[(x-100)+88]\{[(x-100)+80]+11\}$$
$$=[(x-100)+88][(x-20)+11]$$
$$=0$$

由此可得 $(x-100)=-88$,即 $x=100-88=12$ 和關於 $(x-20)$ 的方程

$$(x-20)+11=0,$$

其中 20 稱爲寄位。

由此可得

$$(x-20)=-11,即\ x=20-11=9。$$

故原方程的根是 130,12,9。

李鋭的較數代開法曰:

"以本乘方先開一數,訖,變之,以遞降一乘代開之,所得爲較數,以較數加減(同名加,異名減)先得數爲又一數。"[2] 爲與上法比較仍用前例。此法係將算式(二)繼續變換如下。

1	149	2638	−24024	30	
	30	5370	24024		
1	179	8008	0		
	30	6270			
1	209	14278			
	30				
1	239				(五)

1	239	14278	−100
	−100	−13900	
1	139	378	
	−100		
1	39		

（六）

1	39	378	−10
	−10	−290	
1	29	88	
	−10		
1	19		

（七）

1	19	88	−8
	−8	−88	
1	11	0	
	8		
1	3		

（八）

由算式（一）、算式（五）可知，原方程爲

$$x^3 - 151x^2 + 2838x - 14040$$
$$= (x-130)^3 + 239(x-130)^2 + 14278(x-130)$$
$$= 0。$$

由此可得 $x = 130$ 和關於 $(x-130)$ 的方程

$$(x-130)^2 + 239(x-130) + 14278 = 0$$

由算式（六）、算式（七）、算式（八）可知

$$(x-130)^2 + 239(x-130) + 14278$$
$$= [(x-130)+118]^2 + 3[(x-130)+118]$$
$$= [(x-130)+118][(x-12)+3]$$
$$= 0$$

由此可得 $(x-130) = -118$，即 $x = 130 - 118 = 12$ 和關於 $(x-12)$ 的方程

$$(x-12) + 3 = 0$$

解此方程可得

$(x-12) = -3$，即 $x = 12 - 3 = 9$。其中 -118，-3 稱爲較數。

由上例可見，寄位是降階方程未知元中的常數項。李銳由先得之根加減末商求之。以寄位加減降階方程的根得原方程的根。較數是降階方程的根。以較數加減先得之根得原方程的根。顯然，寄位代開法和較數代開法皆以降階的方程求原方程的另根。然前者求解商式，而後者求解變式。如上例求第二個根 12，兩法分別求解方程

$$(x-100)^2 + 179(x-100) + 8008 = 0$$

和

$$(x-130)^2 + 239(x-130) + 14278 = 0。$$

相比之下，較數代開法的步驟更爲簡明。代開法的創立使得正負開方術成爲求解方程實根的一般方法。

二、華蘅芳數根開方術

數根開方術即華氏《開方別術》(1872) 所述內容[3]。該術借助素數概念給出整系數方程有理根的求法。華氏將整系數方程依其首項系數的絕對值等於 1 和不等於 1 分爲兩類。對前一種情形分別求其正整根和負整根，對後一種情形則以倍根變換歸結爲前一種情形求其整根，進而求得原方程的根。其立法的根據是："凡正負諸乘方式無論如何雜糅其實之諸根中必包有元之諸根。"例如，方程 $x^2 - 22x - 168 = 0$ 有一正根 $x = 28 = 2^2 \cdot 7$。因而可將常數項作素因子分解從中選取方程的整根。其求整根的方法依以下四步進行。

求根的個位數。用 1,2,……,9 代入方程含 x 的各項(求負根用 -1, -2,……, -9)計算其個位數，凡個位數和常數項個位數互爲相反數則所代入之數爲根的個位數。

求根的位數。用李銳《開方說》廉隅超步之法，"異名相步得正商之位，同名相步得負商之位。"

求可能的整根。將方程的常數項作素因子分解，從中選擇滿足上述兩步條件的因數爲可能的整根。

試根。用綜合除法試除可能的整根以確定方程的根。

例如，方程 $x^3 - 20x^2 - 44x - 5040 = 0$。求得根的個位數爲 2,8。根的位數 2。常數項分解爲 $1 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$，可能的整根是 12,18,28,48。試除得 28 爲方程的根。原文除式用籌碼，直書，茲改用阿拉伯數碼橫書如下。

1	−20	−44	−5040	28
	28	224	5040	
1	8	180	0	

又如，方程 $2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$。該方程首項系數爲 2，其有理根可能是分數。作倍根變換 $x = \frac{y}{2}$，得

$$y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 4y - 16 = 0。$$

求得正整根個位數 1,6。正整根位數 1。可能的正整根 1。試除得 1 爲方程的根。故原方程的正根是 $\frac{1}{2}$。華氏此例意在說明分數根的求法。事實上，原方程還有有理根 -2。

華氏指出，"若其實之單位爲 0 而位數大於一者，則其元之單位或爲 0" 此時可將原方程作倍根變換使其常數項之個位數爲非零的整數。例如，方程 $x^3 + 2x^2 + 3x - 9349830 = 0$。令 $x = 10y$，則有 $100y^3 + 20y^2 + 3y - 934983 = 0$，求得整根 $y = 21$。故原方程的根 $x = 210$。

現代求解整系數有理根的方法依據下列定理：若整系數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

有一既約有理根是 $\frac{p}{q}$，其中 $(p, q) = 1$，則 $p|a_n$, $q|a_0$。據此定理求得方程可能的有理根，然後以綜合除法試除即可求得方程的有理根。華氏數根開方術所據原理及方法與此相當。當方程的整根是多位數時，用正負開方術求解需反復運用綜合除法作減根變換直至常數項爲零，而每次減根變換又需輔以倍根變換，運算比較復雜。華氏以可能的整根試除則使上述運算一次完成。清末研治開方術者咸

宗李鋭代開法。易之瀚《釋例》[4](1837)、羅士琳《補增諸例》[5](1838)、汪香祖《衍元筆算今式》[6](1862)及吴嘉善《算書二十一種》[7](1863)皆傳其説而不能於李鋭之外有所增補，相比之下，華氏將素數的概念引入正負開方術而創立數根開方獨具新意。

在中國數學史的研究中，對李鋭代開法和華蘅芳數根開方術研究不多且存在誤解。作爲對正負開方術發展的完整認識，該兩術之内容及意義應予重視。

参考文獻

1,2.[清]李鋭. 開方説卷中，白芙堂算學叢書本

3.[清]華蘅芳. 開方别術，光緒八年刊本

4.[清]易之瀚. 釋例，四元玉鑒細草附，萬有文庫本

5.[清]羅士琳. 補增諸例。版本同 4

6.[清]汪香祖. 衍元筆算今式卷下，光緒二十三年刊本

7.[清]吴嘉善. 算書二十一種開方術，白英堂算學叢書本

曹汝英《增修歐氏幾何》初論

李 迪
(内蒙古師範大學科學史研究所,呼和浩特,010022)

關於《幾何原本》的研究,有2千多年的歷史,在我國也已有七百多年,近年來還有抬頭的趨勢。實際上,還有許多工作等着我們去做,就是最基礎的資料工作仍然没有做完,本文要討論的曹汝英《增修歐氏幾何》就是一例。

雖然這部書出版不到百年,而且是以印本問世,但是在其後的專門書目中都未著録,李儼在著作中有曹汝英條,著録其著作五項,而没有《增修歐氏幾何》[1]。丁福保、周雲青的目録中同樣未著此書[2]。因此,筆者認爲是有關《幾何原本》資料的新發現。《增修歐氏幾何》5卷,附4卷,清刻朱印本6册,題"番禺曹汝英學"。經與《幾何原本》對照,此書5卷係《幾何原本》前5卷,但與其他完整的中文刊本有許多不同,主要者有四:第一,對於界説、命題等的敘述有的相同,有的有很大改變,並對界説加了名稱。爲了説明問題,現將卷一的36條界説中不同者作對照表如下:

增修歐氏幾何		徐光啓、利瑪竇譯幾何原本界説
名稱	界説	
綫之界	綫之界是點	凡綫之界是點
直綫	諸點所引之方向處處相同,則所成之綫爲直綫	凡直綫止有兩端,兩端之間上下更無一點
平面	面内任取兩點,若以兩點爲界之直綫恒貼面上,則此面爲平面	平面二面平在界之内
平角	兩綫相遇作角爲平角	平角者兩直綫於平面縱横相遇交接處
直綫角	兩直綫相遇作角爲直綫角	直綫相遇作角爲直綫角
直角、垂綫	直綫垂於他直綫之上,若兩鄰角等則兩角各爲直角,而直綫下垂者謂之横綫之垂綫	直綫垂於横直綫之上,若兩角等必兩成直角,而直綫下垂者爲他直綫之垂綫
圜	圜爲平面形,以一綫爲界,自界至圜之中處作直綫俱等	圜者一形於平地居一界之間,自界至中心作直綫俱等
圜心、圜周	圜之中處爲圜心,其界爲圜周	圜之中處爲圜心
圜徑、半徑	過圜心作直綫兩端抵周者爲圜徑,自圜心至圜周之直綫爲半徑	自圜之界作一直綫過中心至他界爲圜徑,徑分圜兩平分

半圓形	圓徑與半圓周所界之形爲半圓形	徑綫與半圓之界所作形爲半圓
多邊形	在多直綫界中之形爲多邊形	在多直綫界中之形爲多邊形(五邊以上俱是)
直角形	四邊形四角直而邊兩兩相等爲直角形	直角形其角俱是直角其邊兩兩相等
斜方形	四邊形四邊等而角非直角爲斜方形	斜方形四邊等但非直角
長斜方形	四邊形其邊兩兩相等而角非直角爲長斜方形	長斜方形其邊兩兩相等但非直角
平行綫	兩直綫同在平面內各將兩端引長至無窮不相離亦不相遇爲平行綫	兩直綫於同平面行至無窮不相離亦不相遠而不得相遇爲平行綫
平行綫方形	四邊形其邊兩兩平行爲平行綫方形	一形每兩邊俱平行綫爲平行綫方形
角綫方形、餘方形	平行方形之對角綫上有一點，過此點又有兩直綫與方形之邊兩兩平行，則原形必分爲四個方形，其兩形有對角綫者爲角綫方形，其兩形無對角綫者爲餘方形	凡平行綫方形若於兩對角作一直綫，其直綫爲對角綫，又於兩邊縱橫各作一平行綫，其兩平行與對角綫交相遇，即此形分爲四平行綫方形，其兩形無對角綫者爲餘方形

通過上面的對照表可以看出:《增修歐氏幾何》的譯文一方面照錄了某些原來的文字，另一方面也有了改變，有的改變很大，如第 6 界和 17 界都增加了內容，而不是一般字句修改。

第二，徐光啓等譯本有“公論”19 條，曹汝英本則有公理 12 條，是根據當時西方教科書而删去了後 7 條。他説:“據徐譯本，本應有公理 17 條，惟後 7 條近日西國幾何教科書皆删去不讀，故此編亦止列十二條”。其他地方也有增减的情況。

第三，把原來全用文字叙述而改爲文字叙述和符號相結合的方式，用符號“=”(等號)、“∥”(平行)、“⊥”(直角)、“∠”(角)、“⊥”(加)、“T”(减)、“▱”(平行四邊形)……，但是字母仍爲中文的，即甲、乙、丙、……子、丑……。

第四，把原來的題目分爲“法題”和“理題”兩大類:“一爲求作之題，名曰法題;一爲求證之題，名曰理題”，並進行了解釋，曹汝英認爲:“然無論何種題，皆同一體裁，知其體裁，則作幾何題時自不忙亂。”於是按西方的流行作法，把解題步驟分爲“題目”、“解題”、“作圖”和“證據”四級，這就是“同一體裁”。

據以上四點可知，曹汝英所見之“歐氏幾何”應係當時歐洲稍加改變的《幾何原本》前 5 卷，用作教科書。

曹汝英的重要工作主要在於“增修”。他爲甚麽要“增修”呢? 是因爲“歐氏之書，既論各種之形兼言數理，則一切度皆賅無矣。然歐氏所論數理，詞旨幽深，非初學者所當急務。故泰西學生之習歐幾里得者，止習前六卷。[第五卷亦有不習者]及第十一卷而已。其餘各卷所論者姑舍，是又因書中間有奥晦之詞，且不能容括今日新理，故又增修之，以期利便初學，意至善也。今不揣簡陋，師其法，以輯引編，題曰《增修歐氏幾何》。”增加了大量原書中“未有之題”。

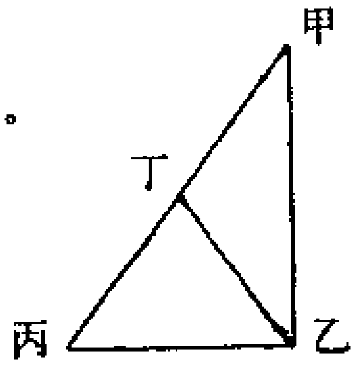
曹汝英所增之題，顯然絶大多數係西方初等幾何書中所有者，是否有他本人所設之題，不好判

斷。但不論如何，增修部分中包括了不少對中國人來說非常新穎的內容。下面列舉幾項：

第一項：逆推法。附卷一第一款爲"反求法"，實爲逆推法，即："由題目所設之事，層層推證，乃可得題目所求之事，此爲幾何正法，故名曰正求。若將題目所求之事權作已知，反推題目所設之事，或推前之所學有何義理，與所設之事相關，則名曰反求。當反求時或須徵引舊題或須作圖，必謹記之。俟推得所設之事，或推得相關之理，乃反其次序，而順列之，即得正求之法。"這段話講得相當明白。每一道幾何問題都由題設和所求兩部分組成，前者爲已知，後者爲未知，由題設出發層層推證，得到所求的結果，這叫正求。把所求當作已知，層層逆推，直到題設，這叫反求。

當時對反求法似乎還有些不得已的心理狀態。曹汝英在上段話之末加了這樣一段夾注："反求法雖不能謂之定法，然法題往往可用此法求之，亦聊勝於無法也。"

書中舉了"理題"和"法題"各一題爲例以說明反求法的梗概。

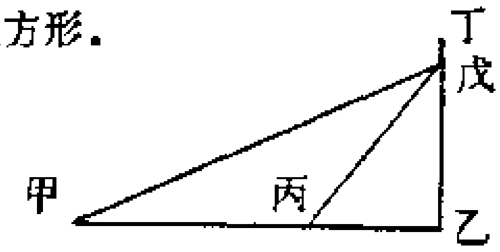


第一題　理題：勾股形從弦之中點作綫至各角，則此三條必等。

書中首先進行了分析：設△甲乙丙爲一勾股形，∠甲乙丙爲直角，甲丙爲弦，丁爲其中點，丁、乙聯綫，則要證明丁甲＝丁乙＝丁丙，這就是所求。然後用反求法證明：假定丁甲＝丁乙＝丁丙成立，則∠丁甲乙＝∠丁乙甲（第一卷 5 題），∠丁丙乙＝∠丁乙丙（同上）。因而

∠丁甲乙＋∠丁丙乙＝∠丁乙甲＋∠丁乙丙（公理二），

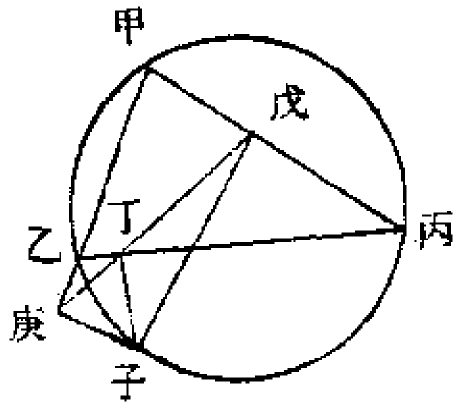
有∠甲乙丙＝∠丙甲乙，則∠丁乙丙必爲直角（卷一第 32 題）。∠甲乙丙既然是直角，"則與題設之事相符"。在此基礎上使用"正求之法"進行證明。



第二題　法題：有直綫求分兩分，令大分上正方形倍於小分上正方形。

本題的意思是：設甲乙爲已知綫段，在其上求作一點丙，使甲丙^2＝2 乙丙^2。現假設丙爲所求之點。根據等腰直角三角形的弦方等於 2 倍勾方或股方的定理，於是從乙作乙丁⊥甲乙。在丁乙上取一點戊，使與乙丙相等，丙、戊聯綫，則丙戊^2＝2 丙乙^2（卷一第 47 題）。故丙戊^2＝甲丙^2（公理六），於是有丙戊＝ 甲丙（第一卷 46 題三系）。既有丙戊＝甲丙，聯甲、戊，則得∠丙戊甲＝∠丙甲戊（卷一第 32 題），因而有∠戊丙乙＝2∠丙甲戊。又，∠戊丙乙爲半直角（卷一第 32 題三系），故∠丙甲戊必爲直角的四分之一。既然∠丙甲戊爲直角的四分之一，而戊乙又垂直於甲乙，"則戊甲、戊乙兩綫皆與原設甲乙直綫有相關之理"，這就可以用正求法進行證明。

整個方法和思路與現在所用者已沒有甚麽區別。這是首次在中國的數學文獻上見到的有關逆推法的詳細文字記載。



第二項：著名初等幾何定理。在書中特別舉出名稱的有兩個。

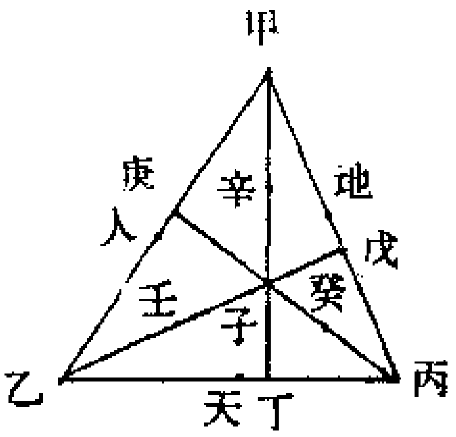
第一個，西姆松綫。附卷三之第 10 題爲：圜內有切界三邊形，若於圜界上任取一點作垂綫與三邊正交，或與三邊引長正交，則三垂綫之端必同居一直綫內。

這個定理現在的表述方法是：設△甲乙丙內接於圓，子爲圓上（異於甲、乙、丙）任一點，由子向三邊或其延長綫作垂綫，垂足戊、丁、庚共綫。證明從略。

曹汝英在證明之後有這樣一段話："上圖戊庚綫，西人稱爲子點至甲乙丙形之鮮氏綫，此題乃鮮姆遜所立，因以其名名此綫也。"

鮮姆遜即今譯之西姆松(R. Simson, 1687—1768),蘇格蘭幾何學家,早年受教育於格拉斯哥,畢業後從事數學教育工作,1711年成爲格拉斯哥大學數學教授。他對古希臘數學多所研究,有4種著作出版[3],其中並未包括後人所謂的"鮮氏綫"即西姆松綫或西姆松定理,真正的發明者爲瓦拉斯(W. Wallace),他於1797年提出此定理,早已有人考證過[4]。

第二個,九點圓。附卷四第5題(理題)就是講這個著名問題的,原文如下:三角形從三角至對邊各作垂綫相交於正心點,次將正心點至三角之綫各兩平分之,則所分三點及三垂綫之端并原三角形各邊中點必同居一圓之界。



△甲乙丙爲已知,由甲、乙、丙分別向對邊作垂綫,交於一點子,垂足爲丁、戊、庚。甲乙、乙丙、丙甲之中點分別爲人、天、地。又甲子、乙子、丙子的中點分別爲辛、壬、癸。則三個垂足和六個中點"辛、庚、人、壬、天、丁、癸、戊、地九點必同居一圓之界"。證明從略。

"此題之圓名曰九點圓"。

關於"九點圓的歷史也有一些誤傳,有人認爲係歐拉所發現,因稱"歐拉圓",還有人稱之爲"浮爾巴赫圓"。浮爾巴赫(K. W. Feuerbach, 1800—1834)係德國數學家,1822年有關於三角形幾何學之專著,但其中無"九點圓"之記載[5]。有的作者稱浮氏於1822年發現"九點圓"[6]。經人研究,此定理係逐漸形成,1804年及1807的英國雜志中即已隱示,1821年法國幾何學家龐斯列(J. Y. Poncelet, 1788—1887)首先明白表述,而浮爾巴赫則於1822年獨立發明[7]。

書中在此定理之基礎上又給出三條定理。以上兩著名初等幾何問題,均係首次見於中文文獻。

第三項:軌迹問題。附卷一第9款和附卷三第5款都是專門討論軌迹問題的部分。前者叫"點之公界綫","公界綫"即軌亦,"點之公界綫"即點的軌迹。後者則逕稱"公界綫"。在前者的開頭先舉例說明軌迹的內容:一個是(平面上)到一定點有等距離的點所成之軌迹(圓);一個(平面上)到一給定直綫等距離之點所成之軌迹(兩條平行於給定直綫的直綫),然後給出定義:"無論直綫曲綫,若綫內諸點恒與所設情節相符,而綫外之點皆不符者,則此綫名"點之公界綫"。其中所謂"情節"即現在題設中的條件,此定義很嚴密,實際上相當於說點的軌迹爲符合某種條件的集合。在定義之後,又說"求公界綫之題,大率分(甲)(乙)兩級作之",即分兩個步驟:第一先按條件作出"公界綫何在";第二再證明"公界綫內無論何點皆與所設情節相符"。然後又舉例詳細予以說明此類問題的解法,此處不贅。

在中國,軌迹問題前人雖然有所涉及,但是明確給出定義,本書可能是首次。

第四項:"系"。在現代數學研究中,對那些由公理、定義、定理較容易地直接推得的結果叫做"系"(或推論)(Corollary)。中國傳統數學由於沒有嚴密的邏輯結構,根本不存在這種確切的用法,在極少的論證中隱含着有類似思想,三國時劉徽就是一例。在本書中則多次使用了"系"這個術語,雖然未找到關於系的定義,但是正是我們所說的Corollary,有的定理之下有若干條,叫做"一系"、"二系"……。例如附卷三第18題"理題",是一條軌迹定理:"兩綫相交任作之圓亦必在交角之平分綫內",其下有兩條系即:

一系　兩綫相交,任作無數圓切兩綫,則平分交角之綫必爲諸圓心之公界綫。

二系　兩綫相交,若於交角平分綫內任取一點爲心作圓,與一綫相切,則所作之圓亦必與餘一綫相切。

在卷一的開頭有一段較長的文字,係曹汝英所寫,有全書前言的性質。其中包括一些有關歐幾

里得和他的《幾何原本》的資料，現摘一段如下：

“周顯王時，西國有歐幾里得，希臘人也。年少游學雅典[希臘都城]，長講學於非洲亞力山大城，著述繁富，其尤精者專論點綫面體之形，並闡發數理幽元之旨，書成列於學官，名曰《額里門次》。《額里門次》之爲言‘本原’之謂也。[説據《西國疇人編年紀》，英人波勒撰，未有譯本]後人重其書因及其人，遂名之曰《歐幾里得》，猶中土之重孟子而稱其書曰《孟子》也。……”

文中之“額里門次”爲 Elements 之譯音，即《幾何原本》之英文名稱。而所引的那本《西國疇人編年記》似爲數學史著作，查法國的 J.Boyer 於 1899 年完成一部《數學史》，其第四章所述之内容與上引資料基本相同[8]，或係指此書？曹汝英的其他數學著作大都在本世紀初，時間上也合適，但曹汝英説是英人波勒，而這裡是法國 Boyer，現無法確定引文的來源。

曹汝英還對“幾何”一詞予以説明，他説“幾何二字有兩解”，是根據卷五第 3 定義而來的，“其一即若干之謂，此人人知者；其一乃任何度之謂，此則稍不易明者”，並進一步進行了解釋。

特别值得注意的是對至關重要的“第十一公理”即通常所説之第五公設有這一樣一段話：

“此條公理，後人皆以爲非極淺顯，蓋尚有更淺之法可證其必相遇也。故學者暫可不理會之。”

這可能是在我國文獻中第一次提到試證第五公設的問題。但是他不知道，此問題由於非歐幾何的建立早已解决。實際上，第五公設是後來提出的平行公理的等價命題，是獨立的、不能證明。歐氏幾何正是以這條公理爲特徵的。由此可見，中國當時在幾何學方面遠遠落後於歐洲。大約過了 10 年左右，非歐幾何始傳入我國[9]，對其研究和對第五公設的深刻認識還談不上。

通過上述情况來看，《增修歐氏幾何》一書，盡管内容是很淺顯的初等平面幾何學，可是却包括了不少對當時中國來説是很新穎的問題和思想，在《幾何原本》研究史上應適當提及。總的來看，曹汝英的工作還是有意義的，值得肯定。至於當時中國翻譯的初等幾何還有多種，如鄭鍼英譯述之《幾何學闡》即爲其中之一，雖與《幾何原本》有千絲萬縷的聯係，但是却完全脱離了《幾何原本》的模式，兩者迥然不同。

在本文寫作過程中和會議期間，高宏林、朱恩寬等先生曾給予幫助或提供寶貴意見，謹致謝意。

參考文獻

1. 李儼. 近代中算著述記，中算史論叢第二集，1954，北京：中國科學院出版，189—190
2. 丁福保、周雲青. 四部總錄算法編，1957，商務印書館，索引第 13 頁。
3. Dictionary of Scientific Biography, Vol.XII,1975,Printed in the USA,445—447
4. Mackay.J.S,Proceedings of Edingburgh Mathematics Society. IX(1890),83—90(轉引自 5)
5. 7. Johnson,R. A. 著，邱丕榮譯. 近世幾何學，1954，上海：商務印書館，249—250
6. Dictionary of Science Biography,Vol.IV,1971,Printed in the USA,601—602
8. J. Boyer 原著、[日]林鶴一譯. 數學史，1928，東京：太倉書店，21—22
9. 李迪. 西方近現代數學傳入中國之經過，中國科學技術史論文集(一)，1991，呼和浩特：内蒙古教育出版社，234—254

關於印度、中國和日本之間的古代數學

道脇義正
（日本前橋市技術學院院長）

序言

古代的日本數學直接或間接地受到中國數學的影響。

考慮到佛教從印度傳入中國，因此印度數學影響了中國數學。

從這一點來看，我們指出《九章算術》和《麗羅娃提》(Lilavati)之間問題的相似之處。

這篇文章的主要內容是簡要地論述了測量問題和立方根問題。

1、立方根問題

1.1 關於《九章算術》的例子。

中國數學有兩個學派，一個學派一直隨天文學一起進行研究，這就是，它已經發展了作爲天文一部分的制訂曆法。另一個學派由於民間生活的需要來進行研究。

《九章算術》屬於後者，這部書是古代以來數學知識的集成。盡管許多學者在一世紀和二世紀就讀到了它[1]，它的作者和寫作時間還是未知的。很難明確地陳述這本書裡的問題，而劉徽在263年注釋了這本書[2]。

《九章算術》第四章少廣論述了求解正方形，立方體，圓或球體的面積和體積等內容。它包括下列問題[3]。

(19)有立方體其體積是1860867，它的邊長是多少？

答案：123。

(20)有立方體其體積是1953.3，它的邊長是多少？

答案：12.5。

(21)和(22)是與(20)相似的問題，解法省略。

1.2《麗羅娃提》舉例。

《麗羅娃提》是婆什迦羅Ⅱ(1113或11143)寫於1149或1150年的著作，它是印度中世紀非常著名的數學課本和最重要的數學史著作。這本書在當前印度學者中也是很流行的。據說婆什迦羅寫成它而達到中世紀印度數學的頂點，在有創見和創新的觀點上，他可以和阿耶波多Ⅰ(Aryahata)和婆羅摩笈多(Brahmagupta)相提并論[4]。

在這本書裡，問題被描述成一首詩，它很長，因此在這裡我們給出它們的一個短部分。

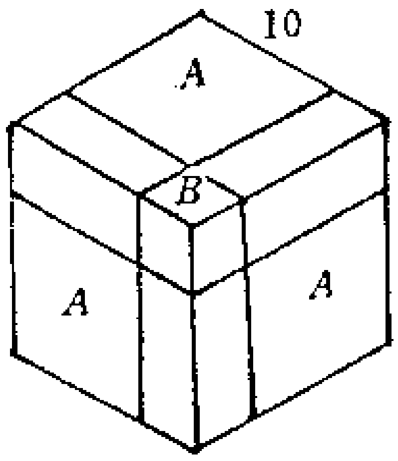
(28)和(29)求19683的立方根，解法省略。

1.3 關於《算法新書》的例子。

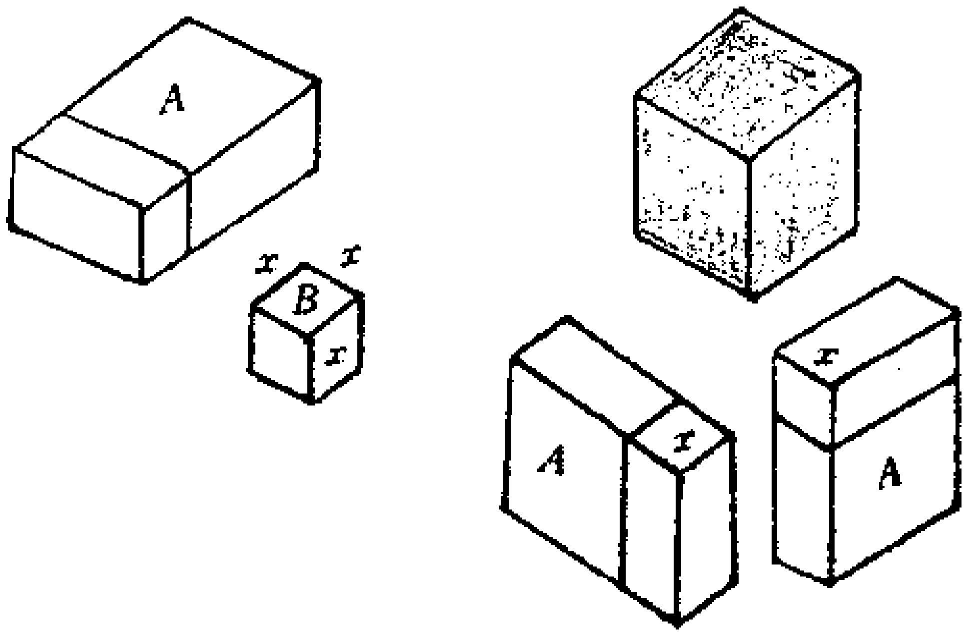
在日本，長谷川寬(1782－1838)是日下　誠(1764－1839)的一個弟子，他建立了長谷川——所數學學校，教育了許多學生。他寫了許多有名的數學課本，《算法新書》是其中之一[5]。有一問題是求一體積爲1728的立方體的邊長？

他的解法如下：

設 $10+x$ 是立方體一邊之長，則 $(10+x)^3=1728$ 參照下圖[6]。

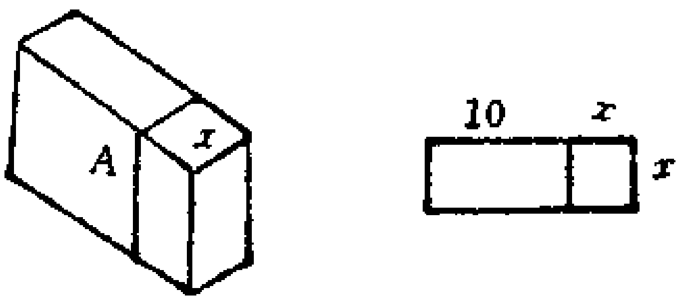


左圖立方體內減去初商(10)三次冪餘728。



餘積(728)含三個 A 和1個 B，

忽略 B，餘積除以3爲 A 之積。



A 除以初商(10)爲上側面積，

再除以初商10試得次商 x。

2、測量問題[7]

2.1《麗羅娃提》舉例。

斷竹問題:有一根竹高32 hastas，在中間將它折斷，頂點接觸地面處距底端16 hastas，問從底端到折斷處有多長?

2.2《九章算術》舉例。

有一顆樹，一根繩子自其頂端垂下，繩在地上餘留三尺。當一小孩拿起繩末端跑開，他能到達距樹底8尺遠，問這根繩子多長?

2.3 關於規矩分等術(萬尾時春(? —17223))的例子

一根蘆葦長在池中，它的杆在水面之上，求出池的深度。(數值省略)

3、關於《麗羅娃提》中立方根的補充。

對於立方根問題的解法，我們根據 E. H. Phaslke，K. S. Patwardhan，S. A. Naimpally 的《麗羅娃提》回顧(1971)用另一種方法表示，它是由 M. Dube 教授提供的。

問題：求 1953125 的立方根？

解釋：盡管類似的方法用在後代的一本算術書中，但有些不同，我們通過上面的書來模仿這個解法。首先我們把 1953125 分組，第一組是 1，另組是 953。减法 1^3-1，餘 0 我們寫上 9，接下來是 9. 新的除數是 $3.(1)^2=3$，我們取 2 作爲商，把它寫在根的後面。

$$3.(1)^2.2=6 \text{和} 9-6=3$$

3 的右邊我們寫上 5 是下一個數字，新的除數爲 $3\cdot 1\cdot 2^2=12$。35 減去 12 得 23，我們把 3 寫在 2^3 的右邊，從 233 中減去 23 得 225，在 225 右邊與 1 是下一位數字。新除數是 $3.(12)^2$，商爲 5，我們做同樣的步驟，那麼 $2251-3.(12)^2.5=91$，$912-3.(12).5^2=12$，$125-5^3=0$ 所求立方根是 125，解法列圖式如下：

根	Pankti	1953125
1		1
		9
	$3.1^2.2$	6
2		35
	$3.1.2^2$	12
		233
	2^3	8
5		2251
	$3.12^2.5$	2160
		912
	$3.12.5^2$	900
		125
	5^3	125
		000

答案：125。

簡言之，以上計算依據一個代數恒等式：

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ &= a^3+3ab(a+b)+b^3\end{aligned}$$

進而 $(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2\cdot c+3(a+b)c^2+c^3$ 可以方便地使用。

4、結論

測量問題論述了同樣的思想，它們也基於它們的國家，可證明它們正使用畢達哥拉斯定理。立方根問題的原理是由於代數恒等式

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a(a+b)b+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ &= a^3+3ab(a+b)+b^3\end{aligned}$$

盡管它們的解釋方法是不同的。

這三個國家的古代數學區別於西方風格，定理的形式不是一個。數學是全世界的，尤其是在使用中國特徵和相鄰國家之間。我們建議由印度、中國和朝鮮學者作一個共同的研究，如果我們能夠做到的話，我們將會得到東方數學史研究上更新進展的事實。

參考文獻

1. 錢寶琮. 中國數學史，第二版北京：科學出版社，1981. 26. 61
2. 李迪.《九章算術》及劉徽注爭鳴問題概述，《九章算術》與劉徽，北京：北京師範大學出版社，1982. 28－35
3. Y. Michiwaki & T. Kobayachi, On the Resemblance Problems of Lilavati，九章算術和和算，富士論叢，Vol. 32，No. 1，May，1987。
4. Indian National Academy：A Concise History of Science in India，P. 168，The Baptist Mission Press，Calcatta(1971).
5. 長谷川寬、千葉胤秀，算法新書(1830)，日本。
6. 道脇義正、小林龍彥．和算と數學教育，《群馬大學地方研討會・長谷川學校》卷 6(1988).(日本).
7. T. Hayashi & M. Yano, History of mathematics 2, Medieval Mathematics, Kyoritsu Press (1980) (in Japanese)

(魏保華譯，李迪校)

《九章算術》、《綴術》與朝鮮半島古代數學教育

金虎俊
（延邊大學數學系，延吉，133002）

本文概述了《九章算術》、《綴術》在朝鮮半島古代數學教育中的地位、朝鮮半島古代數學教材的特點以及對後世的影響。

一、《九章算術》、《綴術》在朝鮮半島古代數學教育中的地位

（一）、《九章算術》、《綴術》傳入朝鮮半島的時間、方式。

迄今爲止最早記載古代朝鮮半島記事的典籍是《山海經》。該書第十二《海内北經》就記載了"朝鮮"名稱和朝鮮半島的地理方位等知識。在戰國時期的《逸周書》中也不止一次地提到朝鮮當時的名稱"良夷（東夷）"、"高夷（高句麗）"等。東漢初，王充著《論衡》所記古朝鮮的來獻就是西周。古燕地、朝鮮半島和日本出土的實物資料都可以説明周秦時代中朝之間的往來已頻繁。隨着漢語、漢字、漢文化的廣泛傳播，中算和中算教育也陸續傳入朝鮮半島。到了公元前十世紀後，古朝鮮已有了"卜筮"、"算術"、"漢數字"等中算知識；公元三世紀末，古朝鮮已設有博士官職，博士官職以研究天文曆法爲主；準王曾任命衛滿爲博士。從公元前108年後，樂浪、真番、玄菟、臨屯等郡縣都較好地使用了中算知識，到公元初，樂浪、真番等郡縣運用《許商算術》、《杜忠算術》、《周髀算經》等知識解決了與天文曆法有關的問題。公元114年前後，《九章算術》通過樂浪傳入高句麗後，被應用在觀測日蝕等方面。公元273年後，《九章算術》注、《海島算經》等中算通過樂浪、帶方等郡縣傳入高句麗、百濟國。當時高句麗的天文官署、主簿、百濟的日官部（天文曆算、卜筮）、都市部（市場、度量衡）都運用了《九章算術》注、《海島算經》。公元六世紀初，隨着佛教的廣泛傳播和天文曆法的交流《九章算術》、《綴術》等中算傳入朝鮮半島三國（高句麗、百濟、新羅），使當時的朝鮮半島數學教育有了良好的開端。

（二）、《九章算術》、《綴術》在朝鮮半島各朝代的數學教育中所處的地位。

1. 三國時期數學教材的來源

三國時期數學教材的來源之一是《九章算術》（簡稱《九章》）。據史料記載：(1)《九章》方田章第一至四題、第七題、和十九題、第三十一題，少廣章第一至三題等記述了關於土地測量方面的内容；(2)《九章》衰分章第五題、第十題，均輸章第十五題等記述了關於税、賦役方面的内容；(3)《九章》粟米章第一題、第二十四題、第三十五題，衰分章第十至十三題等記術了款物交换、朝貢貿易方面的内容；(4)《九章》方田章第十七至十八題，衰分章第一至二題，第六至九題等記述了收支、分配方面的内容；(5)《九章》均輸第一至四題、第七至九題，商功章第二十一至二十二題記述了關於貨物輸送方面的内容；(6)《九章》衰分章第四題，商功章第一至二題，均輸章第二十二題，盈不足章第十八題，勾股章第四至五題、第十題記述了關於土木工程、工藝方面的内容。

三國時期數學教材來源之二是《綴術》。據史料記載：(1)天文曆算術中記述的是較復雜的綴術、等數、歲差、"上元積年"術、等差數列、内插法、同餘式組等内容；(2)測繪術中記述的是測量儀、測量單位、旁要術、地測、天測（如測出交點月等於27.21223日，測出木星的恒星周期等於11.859年）、作圖法、建築工程平面圖、機械和工藝平面圖等内容；(3)方圓術中記述的是量器、古法、割圓術、徽率、開密法、正數（3.1415926＜正數＜3.1415927）、密率的應用、圓算等内容；(4)開立術中記

述的是開差冪、開圓術、開差立、開立圓、開方不盡術等內容；(5)方程正負術中記述的是聯立方程術、不定方程術、正負術、二、三次方程術等內容；(6)體積術中記述的是祖冲之的體積原理（"冪勢既同，則積不容異"），球積術（祖氏推求正確的球體積公式，即用現代文字表示爲 $V_{球}=(4/3)\pi R^3$），積分術（利用積分法求球的表面積）等內容。

三國時期數學教材來源之三是《周髀算經》、《海島算經》。

2、《九章算術》、《綴術》在統一新羅的數學教學內容中占居重要地位。

統一新羅爲興辦教育，仿照唐朝算學 制度設置了明算科、算學博士和助教，並規定了算學教材和考試科目。使用的教材爲《綴術》、《九章算術》、《六章》、《三開》，授課時間 九年。這是朝鮮半島有史以來第一套全國統一設置的數學教材，它們爲朝鮮半島數學教育制度和科舉制度的完善奠定了基礎。

3、《九章算術》、《綴術》在高麗王朝的數學教學和考試內容方面佔據重要地位。高麗王朝的教育形式大體分爲官辦的和民辦的學校，形成了初等教育和高等教育兩種體系。官辦學校有國子監等。國子監，設有明算科，使用的教材爲《九章算術》、《綴術》、《三開》、《謝家》。私學有 12 徙和書堂，也設有中算學科。

高麗王朝的科舉制度雖然仿唐朝但在王權和集權化的過程中，它是以一個制度來設定的。表現在：其一、科舉科目和教育機構的教學課程是相一致的。如國子監的數學課程和考試科目都爲《九章算術》、《綴術》、《謝家》；考試時間定爲兩天，第一天考《九章》十條，第二天考《綴術》四條、《三開》三條、《謝家》三條。其中《九章算術》的學習內容最多，學習時間最長，考試分量也最多，並限定《九章算術》考試不通過就落第。其二、科舉考試資格與入學資格相一致。爲此鄉校的考試科目相應地與官辦的國子監的試求一致，以便考入國子監。

4、李氏朝鮮時期數學教學內容主要有《九章算術》《綴術》

李氏朝鮮初期的教育有兩種形式：官學和私學。官學是國家創辦的學校，它用官費培養國家的骨干人才。官辦的學校不僅講授儒學，還講授漢語、蒙古語、女真語、日本語、樂學、醫學、天文學、地理學、命課學、課學、法學、繪畫、音樂等。其中算學內容包括方田（農田面積的測量）、粟米（谷物交換及貨幣的換算）、衰分（按階層的分配，即按分比例）、少廣（已知農地面積求一邊長）、商功（土木建築用的數學）、方程正負術等等。李氏朝鮮後期使用的數學教材都以《九章算術》、《綴術》爲體例。

李氏朝鮮統治階級爲選拔人才實行科舉制度，科舉分科進行，各科要進行三次考試，第一次在地方，第二次、三次在中央，三次考試合格者，大都被相應的官署錄用。在科舉考試的直接影響下，鄉校和私塾、書堂的算學教育日益興盛，成爲李氏朝鮮教育的有機組成部分。

總之，《九章算術》的 246 個應用題和《綴術》自傳入朝鮮半島，就一直是數學教育的基本教材，被作爲朝鮮半島人們探討、研究數學的珍貴資料而世代相傳。這就保留了《九章算術》、《綴術》開始所具有的鮮明特點的連續性和完善性，使得朝鮮半島數學教材沒有象古巴比倫、古埃及那樣中斷，這是《九章算術》、《綴術》對朝鮮半島古代數學教育的最大貢獻。它們在朝鮮半島數學教育中佔據的地位是任何教材所不能比擬的。

二、朝鮮半島古代數學教材的特點

朝鮮半島古代數學教材同古代中國數學教材相比雖然有相同之處，但也不盡相同。下面將着重敘述朝鮮半島古代數學教材自身的特點。

1、二元構造的共存是朝鮮半島古代數學教材的根本特點。

朝鮮半島古代數學具有二元構造，即士大夫教養的數學和官僚需要的應用數學。前者立足於傳統教養，追求現實主義。官僚組織機構積極采用既不受宗教與哲學制約，又具有很强的計算性數學教材。如《九章算術》、《綴術》、《謝家》等。

2、結合本國的實際，發展和完善古代中國數學教材是朝鮮半島古代數學教材的基本特點。

《九章算術》、《綴術》自傳入朝鮮半島，經過反復使用，不斷修改、補充，並在大量的注釋和演算的基礎上，使之成爲符合朝鮮半島實際的數學教材。特别值得一提的是宋代已失傳的《綴術》，却在高麗王朝的明算科中，仍被列爲基本教材。又明代失傳的天元術、《算學啓蒙》在李氏朝鮮的算學課程中被列爲必學内容和必考科。同時，這一時期在李氏鮮鮮出現了研究中算的高潮，產生了不少算學名著，如《算學正義》、《算術管見》等。

3、數學科目少，算器應用多，授課時間長是朝鮮半島古代數學教材的顯著特點。

朝鮮半島各朝代設置的算學教材數目比古代中國少，但授課時間比古代中國長。如統一新羅規定的算學教材數爲四門，比唐朝少一半多，但授課時間爲九年，比唐朝多兩年。又如高麗王朝設置的算學科目數爲四門，比宋朝少一半，但授課時間爲七年。另外，朝鮮半島各朝代注重計算技術，並善於使用算器，這一特點比中國、印度更爲突出。

4、注重由淺入深的循序漸進性、發展性原則是朝鮮半島古代數學教材的重要特點。

統一新羅使用過的《六章》是在《九章算術》的基礎上，按從易到難、由淺入深的順序，以問題的性質分類編排，它符合循序漸進性原則。到了高麗王朝時期，以《謝家》來代替了原來的《六章》，突出了《九章算術》。同時在原有《綴術》上，增加了圓算，方程正負術，球積術等新數學内容，它符合發展性原則。

5、講究數學教材設計的藝術性是朝鮮半島古代數學教材的鮮明特點。

朝鮮半島古代數學教材設計精良，文學修飾絶倫精湛，算器的形狀、色彩多樣，善於用圖、歌訣等形式總結數學成果，使數學教材通俗易懂，藝術性强，教學效果良好。如《測量圖解》中用圖較多，《九一集》中給出歌訣形式較多。

三、《九章算術》、《綴術》對後世的影響

《九章》、《綴術》和《幾何原本》都是朝鮮半島上流傳較久的數學教材，它們在朝鮮半島數學教育發展中都產生過深遠的影響，但《九章算術》、《綴術》對朝鮮半島古代數學教育產生的影響遠大於《幾何原本》。

其一、雖然《幾何原本》是世界上流傳最廣的不朽名著，但十七世紀，通過中國，它纔傳入朝鮮半島，當時並未有引起朝鮮人們的重視，直到十八世紀中期，李氏朝鮮的個别算學家纔開始介紹《幾何原本》。而《九章算術》、《綴術》在朝鮮半島已根深蒂固，朝鮮半島三國時期已把它們定爲國學的算學内容，統一新羅、高麗王朝把它們定爲官辦學校的必修教材和必考科目，李氏朝鮮的數學教材建設也是以《九章》、《綴術》爲藍本而發展和完善的。《幾何原本》傳入之後，相當長時間内仍是如此。

其二、《九章算術》、《綴術》的數學思想在朝鮮半島得到延續和發展。

1、數學名詞和用語。朝鮮半島古代數學教材采用《九章》、《綴術》的數學名詞和用語中，沿用到今的一般用語有步、類、積、演算等；空間形式用語有田、平行、表里、盈虛、圓、球等；數量關係用語有分、率、圓周率、相當、相互等。

2、數學證明。朝鮮半島古代數學教材，對數學命題主張言必有據，其演算論證完整，符合邏輯規

律。如南相吉著《九章術解》和李尚赫著《算術管见》都是運用圖解分析方法，其推理論證完整而嚴謹，接近近代水平。

3、數學成果。三國統一新羅，高麗王朝，李氏朝鮮時期研究數學的學者大都從《九章算術》、《綴術》開始入手，通過研究而取得重要成就。如任浚精通《九章算術》，著有《新編算學啓蒙注解》，洪正夏研究《九章算術》、《啓蒙算》，著有《九一集》；黃錫鼎著有《算學入門》，該書二十三卷中有徽率、密率、祖冲之圓算、第一密法、第二密法、第三密率、徽術二、密率二等。這些都說明朝鮮半島古代算學名著以及算學成果是研究《九章算術》、《綴術》等中算基礎上取得的。

其三、《九章算術》、《綴術》的教育模式即"問題中心，從例中學"，在三國，統一新羅和高麗王朝普及和應用，到了李氏朝鮮時期得到進一步的發展。如南相吉(1820－1869)著有《九章術解》，用這種教育模式，啓發人們進行探索，取得了較好的效果。"問題中心，從例中學"的教育模式對現代高等教育，尤其是研究生教育和繼續教育是十分必要的。同時以問題爲中心的研討式的學習，對傑出人才的培養是不可缺少的。現在韓國等發達國家在培養高層次的專門人才時采用這種教育模式。

綜上所述《九章算術》、《綴術》在朝鮮半島古代數學教育發展史上産生過巨大作用，具有深遠的影響。

參考文獻

1. 金富軾.《三國史記》，高句麗本紀，卷第二十四；百濟本紀第二。
2. 太安麻.《古記事》，八世紀前期。
3.《漢書》王菲傳；《漢書》卷二十八下，地理志，樂浪郡；《漢書藝文志》。
4.《後漢書》五行志，《後漢書》卷一進十五，東夷。
5.《三國志》魏志卷三十，東夷。
6.《魏書》卷九十四，高句麗，百濟；同書，天象志。
7.《北史》卷九十四，高句麗，百濟，新羅。
8.《宋記》卷四百八十七，外國三，高麗。
9.《史記》卷一百十五，朝鮮列傳。
10.《高麗史》選舉一，科目一。
11.《韓國教育 2000 年史》、韓國青年文化研究所。
12. 田以麟.《朝鮮古代教育史》。
13.《日本書記》卷十九，據《國史大系》(日本)，第一册，336。
14. 節丙喜. 韓國古代史研究。漢城博英社，1983。
15. 張政烺等.《五千年來的中朝友好關係》1951，北京：開明書店
16. 李迪.《九章算術》與《幾何原本》，《九章算術與劉徽》，1982，北京：北京師範大學出版社。
17. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社。
18. 金容去、金容局. 韓國數學史，悅話堂，1982。
19. 樸文一等. 朝鮮簡史，1986，延吉：延邊教育出版社，38，44，77——78。

數學史研究文集第四輯 68—74　　1993年7月

漢語區的數學交流

李伯春
（淮北煤炭師範學院數學系，淮北，235000）

文化交流能够繼承和發揚人類的一切文化成果，有利於改革開放，符合世界學術研究的歷史潮流，有助於人們擴大知識面和文化視野，提高文化與思想素質。一句話，文化交流是時代文明的需要。而數學交流是文化交流的一個重要方面，鑒於此，本文擬就漢語區的數學交流的有關問題進行探討。

一、漢字的使用及漢語區的形成

文字，在人類進化史上，是發蒙啓昧的關鍵，是人類文明與野蠻的分野。文字是人類文明的標志[1]。文字是在語言的基礎上產生的，文字的產生反過來又豐富了語言。有了文字，人類纔有了文明史、纔有了嚴格意義上的文化。

中國的漢字是中華民族智慧的結晶，是人類文明的奇迹。我國上古有文字記載的歷史可上溯至炎黃五帝時代，若從大汶口文化的原始文字（陶文）算起，漢字的歷史約有五千年。到了商代中期的甲骨文字，已經形成了較完整的記錄語言的體系，迄今將近四千年。漢字的產生和演變對漢民族的形成、統一和發展起到巨大作用，對傳播中華文化，促進中外文化交流產生了深遠影響，對漢語區的形成起到關鍵作用。

朝鮮位於亞洲大陸的東部，跟中國是山水相連、唇齒相依的親密鄰邦。在歷史上，朝、中兩國關係密切，文化交流頻繁，這裡既有暴力的交流方式，也有和平的交流方式。不僅有遠古相同的"巨石文化"，而且古代朝鮮的歷史在我國史籍中也有着翔實的記載，因爲古代朝鮮北方曾是中國郡縣。

古代朝鮮没有文字，一直使用漢字，到十五世紀時纔創制成拼音文字（諺文），這種文字包括母音和子音共二十八個字母，沿用至今。但諺文創制以后很久，政府公文、國史著述、文人作品，仍利用漢文。不少朝鮮人有深厚的漢文學修養，中國歷代都有朝鮮人參加科舉，考試及第[2]。

日本位於亞洲東北部，和中國是一衣帶水的鄰邦，兩國人民自古以來就有密切往來。

日本古代没有文字，大約在四至五世紀開始用漢字作爲記述工具。日本人民在直接使用漢字（即真名）的過程中，不斷改造和簡化漢字，在九世紀中葉，利用漢字的偏旁改成五十一個字母，其正楷叫片假名，行書叫平假名，這是日本有文字之始，吉備真備和海空等人爲之貢獻很大。但漢文仍然流行，留下不少用漢文寫的書籍。當今日文中仍使用漢字，對漢字的讀法有"音讀"和"訓讀"兩種，其中"音讀"是模仿中國漢字讀音的讀法[3]。

越南與中國的關係，可追溯到五帝時代，所謂"南撫交趾"，交趾即爲現在的越南。漢武帝平南越，開設九郡，設交趾刺史，越南乃正式收入中國版圖，同於內地。歷史上，越南爲中國郡縣長達一千一百餘年，故越南受中國文化影響極深[4]。十三世紀前，漢字是交趾唯一通用的文字。"其誦詩讀書，談性理，爲文章，與中國同，惟言語差異"（《島夷志略》）[5]。十三世紀末，在利用漢字的基礎上，越南創制了本國文字"字喃"[6]。

綜上所述，我們可清楚地看到，歷史上，朝鮮、日本、越南曾長期使用漢字，當今新加坡和日本仍繼續使用漢字，這是漢語區形成的穩定因素。漢語區的形成是中華華夏文化高度文明的標志之一，

漢語區的形成，主要并非依靠武力和政治征服，而是通過這些外部民族在價值觀念上對華夏文化的自覺認同——所謂"向慕歸化"。從歷史上看，傳統中國文化具有極大的同化和融合能力。事實上，它從來沒有失敗或被征服過[7]。

二、漢語區的數學交流

漢語區的形成，促進了區域內的文化交流，當然也促進了區域內的數學交流。這種數學交流，隨着朝代變更、生産力和社會文化的不斷發展而不斷地演化和進步。

1、中國古算在漢語區的傳播

中國是數學的故鄉，是數學的發源地之一。以《九章算術》爲代表的中國古代數學弘揚了"算法精神"，可與古希臘歐幾里德的《幾何原本》相媲美。中國數學發展到宋元時代，出現了秦九韶、朱世杰、李冶、楊輝等數學家，特别是朱世杰的《四元玉鑒》代表了當時世界代數學發展的頂峰，可以説，在此之前，中國古算在世界數學發展史上的許多領域一直處於領先地位。這一領先地位，爲中國數學向漢語區各國的傳播提供了極爲優越的條件。

公元前108年——公元313年，隨着漢字、漢文化、天文曆法的廣泛傳播，《九章算術》也傳到樂浪、玄菟、臨屯、真番、帶方等古代朝鮮半島的郡縣。公元372年——公元六世紀初，隨着佛教經典、曆法的廣泛傳播，《九章算術注》、《海島算經》也傳到高句麗、百濟和新羅[8]。

隋唐時期，中國設置了國庠，其中成立了明算科。朝鮮在當時曾派員來中國留學。唐代中期，朝鮮也仿照隋唐數學教育制度，建立了國學，後改爲大學監。並設置了明算科、算學博士和算學教科書，也制定了考試制度。

宋太祖趙匡胤建國後，對於教育制度仍然沿襲唐制，至元豐六年(1083年)正式成立學校，稱爲國子監，五科之中便有算學科。宋朝數學教育制度興廢無常，但中朝兩國當時的數學教育制度是相通的，都是沿襲唐制。

宋代中朝兩國友好關係不斷發展，朝鮮不但遣派人員到中國留學，而且也向中國購買圖書並反映辦學情況。

至宋高宗紹興六年(1136年)，朝鮮所用數學教材及考試科目都略有變更，但考試内容仍有《九章》、《綴術》、《謝家》等内容[5]。

中日兩國之間文化交流源遠流長。依據有文字記載的歷史，中日間的友好往來始於公元57年。並於公元一世紀，日本開始輸入大陸文化[10]。

東漢時代，有漢人避亂於朝鮮，也有不少漢人遷居於日本。同時中日也開始通使，歷經東漢、三國、晋、南北朝各代，往來不絶。因此，日本的習俗、禮樂、文化等不可能不受到中國的影響。

根據記載，梁承聖三年(日本明欽天皇十五年，554年)有百濟易博士王道良、曆博士固德王保孫將中國易經學説及曆算方法傳入日本。在易經學説及曆算方法裡，必有數學知識，因此可以説，在南北朝期間中國數學知識通過朝鮮博士之手間接傳入日本。

隋文帝建立隋朝之後，與日本來往增加。從公元600年聖德太子開始，日本多次向中國派遣了遣隋使、留學生、留學僧，以直接汲取中國的先進文明[11]。這些留學生、留學僧回國時，從中國帶回大批古代物品和書籍，如元嘉曆、大明曆、升斗兩斤的度量衡制度，漏壺計時器及其制法等。

唐高祖李淵繼隋而興，國力隆盛。日本從公元630年至公元894年連續向中國派遣十九次遣唐使和大批留學生、留學僧，吸收漢唐文化，促進了中國數學東傳日本。特别是大化革新(646)，有力地推動了汲取中國的優秀文化的作用。

在日本天智天皇時期(663—671)，開始籌建學校，置算學博士二人，算學生二十人。同時也籌建

了天文臺。由於觀測急需，日本數學爲之大興。

唐長壽元年(持統天皇三年，692年)，日本正式按元嘉曆頒行了曆法。次年，擴建了天文臺，改稱占星臺。並設置了天文博士和天文學生。

唐長安二年(大寶天皇二年，702年)正式建立學校，並創立了算數科，所采用的教科書爲《周髀》、《孫子》、《六章》、《三開重差》、《五曹》、《海島》、《九司》、《九章》、《綴術》等九部算書。而且學校人員設置及所采取的數學教育制度，也均仿照唐制。

此外，根據寬平時代(889年—897年)藤原佐世著《日本國現在書目》記載，可知《夏侯陽算經》、《張邱建算經》、《五經算術》、《數術記遺》以及《元嘉算術》等書也都傳入日本。可見在唐代中國給日本文化、曆算方面有極大的影響。

北宋時代，日、中"彼此之間的文化地位，大致處於對等狀態"。但到了南宋時代，日本"又和遣唐使時代大量移植唐朝文化一樣，一再努力汲取宋朝的新文化"。元朝忽必烈曾兩次起兵進攻日本，但元朝和日本間的和平往還仍十分頻繁[12]。

日本"中世時代知識水平之低和古代科學的消失簡直是不可思議的"。"再從天文曆算方面看，遷都平安京(794年)之後約70年，自根據861年大春日真野麻呂的改曆上奏而采用宣明曆開始，至1683年(江户時代前期)出現澀川春海爲止，中間一直没有改曆，天文曆算完全無影無踪了"[13]。顯然，這時中日間的數學交流没有大的進展。

越南北鄰中國，爲中國郡縣達一千一百餘年，故受中國文化影響極深。越南在五代時，有一段時間仍用中國的曆法。南宋淳熙三年(公元1176年)，還賜安南國曆日，這種頒曆制度，後來一直延續到清朝。元初，安南也采用郭守敬編制的《授時曆》。

由於日常生活和丈量土地的需要，安南獨立(968年)後對算學比較重視，歷朝都仿中國舉行算科考試選拔人材。李高宗貞符四年(公元1179年)試三教子弟運算等科；陳聖宗紹隆四年(公元1261年)試吏員以書算；胡漢蒼開大二年(公元1404年)舉行鄉試，試法仿元，前四場試文字，第五場試書算；……足見算學受到政府的重視。

總之，從遠古至宋元，中國古算及其數學教育制度以其自己的先進性向漢語區的各個國家進行了傳播，爲東方數學的發展做出了自己應有的貢獻。當然在這種傳播過程中，也吸收了其它民族的優秀文化。

2、中國數學的緩慢發展和西學東漸

元代後期至清代中期，即從十四世紀初至十九世紀初這五百年的時間內，中國數學的發展情況比較復雜。

中國宋元時期的數學中有不少在世界數學史上領先幾百年的成果，這是中外數學史界所公認的，而此後一直到明末這一階段則没有出現領先的成果。從這個角度來講，發展是緩慢的。但另一方面，珠算的發展，從元末出現至《幾何原本》前六卷譯出(1607年)，大約經歷了三百年，達到了完善的地步，無論是制作和算法均如此。從十四世紀至十七世紀初的數學史上看，中國的珠算不失爲一種先進的計算工具。

中國數學落後於世界先進水平是從明末以後。在明末清初這個階段，明末傳入了《幾何原本》及介紹筆算的《同文算指》，由於改曆的需要編輯了《崇禎曆書》，其中介紹了較多的三角知識。入清以後，傳入了對數，《數理精蘊》中介紹了西方的代數知識。這些知識總體說來不是歐洲數學中的最新成果。至清中這一時期，又没能在歐洲所傳入的數學基礎上大力推進，反而轉向宋元數學的整理和研究，實際上又回到了宋元的水平。因此，從純粹數學的發展來看，從元末到清中這五百年左右的時間是中國數學落後的一個主要時期。

當然，這並不是說，在這五百年中，中國除珠算的發展外，再無其它數學成就可言。其間還是出現了學貫中西、兼通曆算的梅文鼎，年希堯的《視學》、明安圖的《割圓密率捷法》以及汪萊、李銳在方程論方面的工作還是大有可觀，其中某些結果的獲得並早於國外，但數量較少，已無宋元時期中國數學的領先地位了。當然這時中國數學向漢語區的傳播也就較少了。

與明清時期相對應，在朝鮮半島是李氏朝鮮時期，簡稱李朝。李朝算學在接受中國算學的基礎上，逐漸形成了具有自己風格的獨立的數學體系。

在李朝前期，世宗大王不僅重視算學，還親自帶頭學習算學。不僅如此，李朝政府的高層官吏也重視算學。

李朝初，國王不僅設置算法校正所、曆算所，而且爲發展算學，還派人到中國留學。世祖時代算學官制也很整備。算學教科書變爲《詳明算》、《楊輝算》、《啓蒙算》、《五曹算》、《地算》。

李期前期出現了一些算學成果。如算學者獨自提出以天元術解高次數字系數方程的方法[14]。

日本經歷了中世時代(自 8 世紀至 16 世紀)，步入江户時代。

1592 年程大位的《算法統宗》問世後，傳入日本，對日本影響甚大。1627 年日本數學家吉田光由著《塵劫記》，跋文稱該書依據汝思(即程大位)之書(嚴敦杰：《算法統宗校釋代序》)。隨後在日本便出現了上一珠下四珠的珠算盤，一直到今天仍在使用。《塵劫記》問世使日本"進入和算時代"。

隨着近代西方文明的波濤拍擊日本海岸，日本開始大量移植西方文明，但日本也有一些獨自發展的科學和技術，和算就是其中有代表性的一例。小倉金之助博士在《日本的數學》一書中對此曾給予高度評價："在日本的學問中，和算是最好地發揮了日本人獨創性的一個領域，如果無視這一點，日本的學問和文化是無從談起的"。以關孝和(1642？—1708)爲頂峰的和算，是以日本獨特的風格發展的。但由於"和算處在東方社會非邏輯直觀之中並作爲趨向脱離現實的技藝而存在的，是在自然科學和技術社會沒有關係的情況下發展起來的，到明治維新時突然暴露了它是一朵'見不到陽光的花朵'，這應該說是鎖國政策(1638 年日本頒布鎖國令)的一個悲劇"。

越南在十五世紀仍繼續引進中國數學。大約在明清之際，算盤流傳到越南。明代數學家程大位寫的《直指算法統宗》也傳入越南，對珠算的應用起了很大的作用。1761 年，安南黎朝曾仿照清朝的做法，舉行數學考試，十二年一試，考平分、差分方法，每次考試録一百二十名(黄國安等著《中越關係史簡編》第 107 頁)[15]。明末清初，中國已改行西洋新曆法，但直至十九世紀初(1809)，越南人習算學、天文學，還完全依賴中國的書籍。越南人撰的《九章算法立成》，其中九歸歌、撞歸法，完全是中國明清時期算術的翻版，可見在越南也流行算盤進行運算。

綜上所述可知，在中國數學緩慢發展和西學東漸時期，漢語區的數學交流不甚活躍，學術水平也不高。西學東漸給東方數學帶來一綫生機，但由於種種原因，西方先進數學並沒有大量輸入東方。

3、中西數學合流

十九世紀前期，中國社會的政治、經濟、文化處在停滯、倒退狀態，封建主義的根基已經衰朽，數學發展與世隔絶。1840 年資本主義列强打開了中國閉關自守的大門，開始了瓜分中國的角逐，使中國淪爲半殖民地半封建社會；同時，伴隨着帝國主義的文化侵略，也帶來了西方科技，增加了資本主義因素，揭開了中國近代史的序幕。從十九世紀六十年代開始，曾國藩、李鴻章發起了洋務運動；以李善蘭、徐壽、華蘅芳爲代表的一批知識分子，作爲數學家、科學家和工程師參加了引進西學、興辦工廠和學校等活動，經過他們不懈的努力，奠定了近代科技、近代數學在中國發展的基礎。1894 年洋務運動以軍事失敗而告終，工廠、鐵路、學校等却留存下來，科技知識也在一定範圍内傳播開來。

在中國數學史上，西方數學第二次輸入前後，清末有一段活躍時期，疇人輩出，著述如林。中國數學家在冪級數、尖錐術等方面已獨立得到一些微積分學的成果，在不定分析和組合分析方面也獲

得了出色的成績。但總的看來，達不到西方同期數學水平。從十九世紀五十年代開始，李善蘭等人把西方數學基礎知識翻譯、介紹到中國來，進行了近代數學的啓蒙教育，自此服膺西學蔚然成風。數學工作者在研究傳統數學時多能注意吸收新的方法，中西印證，融會貫通。但這一階段中國數學除記法稍有改進外，基本上仍保留傳統的形式，多爲語言叙述，證明仍有不足，並未全盤西化。所以是歷史上的中西數學合流的時期。

明治維新(1867)是漫長的日本歷史上最大的社會改革，可以説它是現代日本的起源。

明治初期，通過招聘外籍教師、外籍技術人員以及向國外派遣留學生來專心致志地搞科學技術引進。在向西方學習的過程中，日本在富國强兵的口號之下，被狂熱的激情推動着。甚至在學校教授的數學只限於西算，至使和算没落。這時各類學會包括數學學會相繼成立。科技界可以説是全方位向西方學習，"也恰是在這個時期，開始漸漸出現了可以向國際學術界提出的成果"。數學界的菊池大麓是這時數學界的代表人物，影響甚大。

明治中期，日本人作出了一系列的創造性研究成果，明治15年(1882年)去世的達爾文曾寫道"在世界的一切奇迹中，日本的進展是最大的奇迹"。由於日本資本主義的發展，自然科學包括數學，都有長足的發展。

朝鮮李朝實學期學者研究《九章算術》、《海島算經》蔚然成風。如慶善徵、任睿等精通數學，水平很高。不僅如此，實學期學者在研究中國數學的基礎上，結合當時社會實際，還編寫了許多數學著作。如李尚赫編寫的《翼算》(1850)，上篇正負數論中他提出的有關方程和正負數理論在當時領先於中國[16]。後來，李朝實學期的學者還提出了新的數學方法。其中比較有代表性的是南秉吉著的《測量圖解》(1858)和《九章算術解》。前者圖解手段接近於近代水平，後者則提出了近代邏輯論證方法。但由於自十九世紀中葉以後，朝鮮戰亂不已，所以，中、朝數學交流不多。

1802年越南阮福映在法國殖民者的扶持下建立阮氏王朝。從此至19世紀末20世紀初，越南人民一直堅持抗法鬥争，越南社會動蕩不安。這期間，越南數學與中國數學的交流甚少。

總之，在中西數學合流時期，中國數學並未全盤西化。日本則全方位向西方學習，一些學科的研究水平已接近或達到國際水平，中國這時和日本相比，數學水平已漸漸落後。日本在西方"已辟的坦途上的模仿性前進"，取得了令人矚目的成就。

4、漢語區的現代數學研究

這裡主要論述日本現代數學的崛起，以及中國數學家爲追求現代數學主流向日本學習的概况。至於朝鮮、越南現代數學發展情况則因資料短缺，很難詳考。

日本近代數學教育經菊池大麓(1855—1917，曾兩次留學英國)奠基，後由藤澤喜利太郎(1861—1933，曾留學德國)通力合作推進，對以後世界範圍内數學教育現代化都起着先導作用。對於20世紀日本數學的起飛打下了堅實的基礎。

在19世紀中葉，日本的數學還相當落後，微分、積分、函數等名詞還是由李善蘭翻譯後纔傳到日本去的。但明治維新後，到了20世紀，日本數學進入國際水平的當首推高木貞治(1875—1960)，1901年高木由日本官方派往哥廷根留學，後來成爲發展希爾伯特關於代數數域理論的主要繼承人之一。克萊因和希爾伯特對高木的治學風格、研究方向都有極爲深刻的影響，並且經過高木對整個日本數學起了重要的指導作用。日本數學能有今天的成就，是和高木的名字分不開的。如果説，關孝和代表日本數學的過去，那麽高木則是日本近代數學的開創者。

高木和他的同輩人的最大貢獻是加强和提高了日本國内大學數學教育水平。20世紀30年代，日本大學的水準已和歐洲著名大學相彷彿，在這樣的土壤上，一批批年青的數學家應運而生了。

不但小平邦彦、廣中平祐、森重文等名家屢起，而且日本數學家現在在代數、幾何、分析各個方

而都有一些出色的成果[17]，可謂是群星燦爛。時至今日，日本已進入世界上數學研究先進國家的行列。1978 年國際數學家大會上，日本和美、蘇、法、聯邦德國、英國並列爲數學活動規模最大的六個國家。

中國在 19 世紀 80 年代也向法國派出了第一個學習數學的留學生，與大數學家波萊爾(E. Borel，1871—1956)同學，學得很好，回國後沒有受到重用。1903 年(光緒二十九年)京師大學堂派馮祖荀往日本留學，學習數學和物理學。陳建功(1891—1971)先後於 1913 年、1920 年、1926 年三次去日本留學，師從導師藤原松三郎研究三角級數論，取得了舉世矚目的成就。蘇步青於 1919 年赴日本求學，於 1931 年 1 月在東北帝國大學獲博士學位。李國平也於 1934 年去日本留學。這些人回國之後，與留學歐美回國的一些數學家構成了中國現代數學研究的骨干隊伍。可以説 20 世紀二、三十年代是中國向日本學習、向歐美學習的重要時期。

三、四十年代中國數學在許多分支有了長足的進展。1949 年，新中國成立，百廢待興，在資金匱乏的情況下，黨和政府對科學給予了極大關注，使中國的科學事業(包括數學)得到健康發展。但由於 1957 年的"反右"、1958 年的"大躍進"以及 1966 年 6 月開始的"文化大革命"，又使數學的發展遇到了困難。"文革"結束後，1977 年，吴文俊給出了歐氏幾何機器證明的方案，引起了國内外邏輯學專家和人工智能專家的震動。1978 年召開了全國科學大會，科學的春天到來了，數學的春天到來了。中日、中西數學交流日益頻繁。1985 年 6 月華羅庚曾去日本向數學界做學術報告，日本的數學家也不斷來華講學。與此同時，中國與歐美之間的數學交流也繩繩不絶。此外，中國還向日本、歐美派遣了大批留學生學習數學。十多年來，中國在趕超世界先進數學水平方面做出了不少成就。但數學上的一些"主流學科"(如代數幾何學、代數拓撲學、微分幾何學、大範圍分析等)的發展仍不能令人滿意。我們和日本數學界相比，不足之處甚多，和歐美數學界相比，相差更遠[18]。

三、漢語區的數學交流對我們的啓示

漢語區的數學交流有近兩千年的歷史。在十三、四世紀以前，由於中國先進的文化和領先於世界的古代數學，使得漢語區的數學交流主要表現爲中國數學對漢語區的輸出。自元末至清中，中國數學緩慢發展，西學東漸，漢語區各國的數學都有一定的發展，中國數學向漢語區各國傳播甚少。清末，中西數學合流，雖取得一定成效，而日本從明治維新(1867)始，"富國强兵"，科技騰飛，數學開始崛起，中國數學水平已落後於日本數學水平。20 世紀以來，中國爲了追求世界數學主流，繼續向世界學習。而向日本學習則是其學習的一個重要方面。漢語區數學交流的滄桑之變告訴我們一個道理：先進數學的傳播是超越民族的，是超越國家的，是超越語言區域的，是超越文字區域的。而這種傳播主要是由於人們對先進數學的自覺認同而形成的。由此，我們得到以下幾點啓示。

1、要敢於學習，善於學習

漢語區的形成是先進的漢文化傳播的産物。在漢語區，當中國數學水平領先於他國時，中國數學向外國傳播是自然而然的事情。當中國數學水平落後於他國時，外國數學向中國傳播也應是當然的事情。然而由於中國有悠久的文化傳統，不但對外國的先進思想和科學技術缺少應有的吸收能力，而且還缺乏日本那種對外國文化全面吸收的積極性。"拿來主義"固然有其盲目性，但日本數學發展的成就，日本産生出許多國際著名的數學家，在許多重要的數學部門居於國際領先地位這種事實我們也不能無視。在世界"主流數學"的許多學科，中國處於落後的局面是不容諱言的，這就要求我們要承認現實，勇於學習。我們不但要向日本學習，而且要向一切數學先進的國家學習。我們要取百家的經，走自己的路。

2、數學發展充滿着困難，也充滿着希望

進入 20 世紀以來，至今已有九十餘年了。九十多年來，不管國內外風雲如何變幻，中國數學家對世界現代數學主流的追求從未停止。但是由於中國數學與世界現代數學主流的差距，以至使中國數學事業現在每前進一步，都要付出極其艱辛的勞動。

中國數學發展充滿着困難，但也充滿着希望。當今數學界的數學成果已經向全世界“全方位開放”，數學信息的交流必然會更有力地推動數學的發展。我國古代數學曾長期處於世界領先地位，有着優秀的數學傳統，現在我們的數學又取得了重大進展，所以我們完全可以相信，經過我國數學家的艱苦奮鬥和創造性的勞動，中國必將躋於數學强國之列。

參考文獻

1. 陳佛松. 世界文化史，武漢：華中理工大學出版社，1990

2. 北京大學歷史系簡明世界史編寫組．簡明世界史，古代部分。北京：人民出版社，1974

3. [日]吉田彌壽夫主編．新日語。北京：北京出版社，1982

4，15. 韓琦. 中越歷史上天文學與數學的交流，中國科技史料第 12 卷第 2 期(1991)。

5. 蔡美彪等. 中國通史，第七册。北京：人民出版社，1983 年，576

6. 黄道立. 中古時期的越南。高明振 黄正柏主編.《史學知識千題》，世界史部分。武漢：湖北教育出版社，1987 年 6 月第 1 版，142

7. 何新. 神龍之謎——東西方思想文化研究與比較，關於海外“新儒學”及其對“全盤西化論”的批判，延吉：延邊大學出版社，1988，232—245

8，14，16. 金虎俊.《九章算術》及劉徽的學術成就在朝鮮半島. 北京師範大學學報(自然科學版)，Vol. 27. 增刊了三(1991 年 12 月)

9. 中外數學簡史編寫組。中國數學簡史。濟南：山東教育出版社，1986

10，13. [日]湯淺光朝著、張利華譯. 科學文化史年表。北京：科學普及出版社，1984

11. 池步洲. 日本遣唐使簡史。上海：上海社會科學院出版社，1983

12. [日]木宫泰彦著、胡錫年譯. 日中文化交流史，北京：商務印書館，1980，237，389

17. 張奠宙、趙斌. 二十世紀數學史話，上海：知識出版社，1984

18. 胡作玄. 近代數學的引進與發展：比較研究。科學傳統與文化。西安：陝西科學技術出版社，1983

數學史研究文集第四輯 75—78　　1993年7月

試論中西古代數學的文化差異

王憲昌　　薛伯英
（四平師範學院）　（吉林高師培訓中心）

在人類的文明中，古代數學的發展是特定的文化背景中形成的。從人類文化史的意義上可以說，不同民族文化中數學的差異，是由文化傳統造成的。數學是文化傳統的一部分，當然，數學本身也是一種特殊的文化傳統。本文將從三個方面討論中西古代數學在文化中存在的差異.

一、中西古代數學在文化層次上的差異

在中西古代數學史的研究中，人們習慣於把數學發展按照年代的演變、結構體系的形成來進行研究討論，並以此進行中西古代數學的比較。應當說，這種方法取得了很大的成功。人們也常常運用這種思想方法來評價中西古代數學．但是，應當指出的是，這種傳統的以數學自身編年史的方法爲主的研究方式，很難說明中西古代數學形成的內容、方法、結構相異的原因。換句話說，傳統的"外史"、"内史"的研究方法都很難解釋中國古代數學爲甚麼選擇那樣迥不然不同的發展方向。把數學放在不同民族文化的背景中，把數學看作文化系統中的一個子系統，或者說把數學看成是文化傳統的內容，這種方法往往能給我們提供某些啓示。

在中國的文化史中，數學在遠古時代具有的數量性和神秘性的解釋功能是通過竹棍的排演表現出來的。"筮，數也"[1]。中國古代的卜筮之法使用同一操作對象，這是中國文化的重要特征。

在中國文化的發展中，竹棍具有的數量性和神秘性的解釋功能逐步發生了分裂。以春秋戰國時代爲標志，中國文化形成了卜筮之法《周易》爲主的文化解釋系統（對各種文化現象都以《易經》爲解釋的依據），同時形成了籌算的以數量意義爲主的解釋系統。原始竹棍的操作運演形式分裂成爲兩個完全不同的解釋形式。一個以神秘形式演化爲哲學思辯式的《周易》解釋形式，一個演化爲完全的數量解釋形式[2]。

在中國文化中，原始竹棍操作運演在解釋意義上的分裂，使籌算失去了對中國文化中其它學科的解釋力量。成爲一種應用範疇極小的技藝——只對具體的計算式數量問題發揮解釋作用。

籌算作爲一種技藝，只能以解決實際問題作爲自身存在的載體，以解決具體問題作爲自身發展的方向。籌算不再關注世界的構造，籌算不再注重參與宗教或哲學的思辯，籌算不再注重道德倫理的變化和人世的變遷。一句話，籌算不關心文化傳統"形而上"的問題，而只是作爲技藝的運演手段。當然，數學也在依據《周易》來解釋自己，劉徽在《九章算術》序中說的明白，數學只是"作九九之術以合六爻之變。"

我們來比較一下希臘的數學。

古希臘文明的道路與中國不同，它是一種繼承性文明，它在吸收繼承其它文明的過程中，原始數學的神秘性既沒有與數量性分裂，也沒有逐漸減弱。恰恰相反，古希臘數學利用字母代表數學這一過程，借助文字的力量使數學的神秘性大大地前進了一步。考查古希臘的文化可以發現，古希臘一直利用數學作爲文化的中心解釋形式（對各種文化現象都利用數學的形式給予說明）。古希臘數學由神秘性演變爲解釋世界的一種模式。古希臘數學以解釋世界的方式爲其發展的手段。它參與了宗教、哲學、音樂、邏輯、文學、醫學、天文等各種"形而上"的解釋。可以說，古希臘數學從神秘、宗

教的解釋形式逐漸演化爲一種理性思辯的哲學形式[3]。

從文化系統的層次進行分析，可以發現，中國古代數學從形成體系之後就離開了文化系統中的主導層次，處於受《周易》解釋形式支配的應用技藝層次。與此相對的是，古希臘的數學一直處於文化系統的主導層次，它解釋、說明、支配和影響着文化系統中的其它子系統。

二、中西古代數學運演對象、方法和結構的差異

中西古代數學作爲一種應用技藝，它必須依賴於具體的對象、運演方式和實踐應用的問題。如果沒有實踐問題需要解決，籌算就失 去了存在的基礎；如果沒有實踐提出的問題，籌算就無法發展；如果沒有應用實踐的需要它就會被逐漸忽視和遺忘。

中國古代數學在文化系統中的價值取向，決定了它對運算以及快速有效的籌算方法的構造。可以說，籌算是以具體問題來實現運演方法的構造。籌算是以解決具體問題的籌算運演技巧來實現自己的存在、生存與發展的。這一點就是中國古代數學家人爲編纂某些習題的文化原因。同樣，中國古代數學的應用技藝價值取向，使它不可能再去關注自身的運演方式(籌算運演的方式)是否有獨立再構造的思辯意義。換句話說，中國古代數學不去邏輯地編織構造體系也是一種文化現象。

古希臘數學與中國代數學不同，它處於文化中的主導層次，它對各種文化現象的解釋，使各種學科以數學爲自身典範——數學創造孕育了其它學科的規範模式。作爲解釋世界的模式，數學自身也要符合解釋形式的發展(從數向幾何的轉變)。古希臘數學解釋世界的價值取向，使它不會像中國古代數學那樣關注具體問題，它必須脫離具體，從抽象的意義上來構造自己、表現自己、發展自己。作爲一種解釋形式，古希臘數學必須對自身的運演作出合乎理性思辯的說明。這種價值追求，使古希臘的數學形成了抽象的運演對象，合乎理性要求的運演方式和具有典範意義的結構體系。換句話說，古希臘數學精心編織邏輯運演方式和結構體系，正是出於一種文化的原因。

從數學運演對象和構造差異上比較，中國古代數學追求的是具體問題的運演方式的快速有效，而古希臘數學追求的是抽象的運演方式的合乎理性思辯。中國古代數學是精心構思問題和籌算的運演方式，而古希臘的數學家是在刻意地構造運演方式的理性結構。

中國古代數學在創造籌算運演方法和虛擬構思具體問題時運用了大量的理性，而對運演存在的方式却只是採用了一種實用的態度給予邏輯性說明。古希臘的數學與此不同，它們在說明解釋運演方式的合理性方面投入了大量的理性，但對具體實用却採用了一種淡漠的態度。

從文化系統中數學價值取向的差異上，可以看出，古希臘數學的幾何邏輯演繹方法和構造體系並不是人類數學發展的唯一道路。從本質上說，古希臘的數學運演方式和方法是由特定的民族文化形成的。對於中國古代數學而言，籌算不應該也不可能像古希臘數學那樣去發展。當然，以古希臘數學模式來評價中國古代數學的方法就會把許多的文化因素誤認爲是數學的內在原因了。數學史研究的任務之一，就是要指明中西古代數學在運演對象、方式和結構形式上存在的文化差異，以及在這種差異表象之下的數學深層的內在一致性。

三、中西古代數學在文化效應上的差異

古代數學在文化系統中居何層次，決定了數學的必然價值取向，這種價值取向又確立了數學的運演對象、方式及構造模式。同樣應當看到的是，數學作爲一種文化現象，作爲一個文化系統中的子系統，它對整個文化系統也產生着不同的影響。

1. 在人類文明影響的層次上

在對人類文明的意義上，處於文化系統主導層次的古希臘數學遠比中國古代數學的貢獻要大。古希臘數學是古希臘文化乃至西方文化中各種文化現象效仿的樣板，換句話説，古希臘數學是古希臘文化和西方文化的一種理性模本。從這種意義上可以看到，古希臘的數學深深地影響了西方文明的進程。羅素認爲"數學是我們信仰永恒的與嚴格的真理的主要根源，也是信仰有一個超感官的可知世界的主要根源。……與啓示的宗教相對立的理性主義宗教，自從畢達哥拉斯之後，尤其是柏拉圖之後，一直是完全靠數學和數學方法所支配着的"[4]。

與古希臘數學相比，處於應用技藝文化層次的中國古代數學，無法也不可能對文化傳統産生深遠的影響。在中國文化中充當理性模本的是一種同原始數學操演的64卦構成的《周易》。《四庫全書》論到《周易》時説得十分透徹，"易道廣大，無所不包，旁及天文、地理、音律、兵法、音樂、算術，以逮方外之爐火，皆可援易以爲論。"

如果説文化中的理性模本對文化現象有"整流"和"放大"作用的話，那麽古希臘數學却把西方文化在一定的程度上按照數學的模式進行了整流和放大。然而，中國起到整流放大的却不是籌算，而是《周易》。應當看到，認識並區分中西古代數學在文化上這之種差異，會對我們評價古代數學有所啓示。

2. 在數學史研究評價的層次上

從數學文化的角度分析，古希臘數學在歷史上所發揮出來的巨大影響，並不是數學本身有何特殊的意義，當然也不是數學的演繹方法及構造模式有甚麽特殊的作用，其根本的原因在於數學在文化系統中所處的層次。認識到這一點，我們就可以發現，以往對古希臘數學的評價，實際上把它對其它學科的解釋作用和建構放大作用都看作是數學自身的特徵了。

作爲數學自身規律的研究評價，應當客觀準確地指明哪些特徵是文化因素，哪些特徵是數學自身的規律。如果這個問題不很好地解决，就會帶來數學史研究和評價的某些困境。例如，人們以往對於中國古代數學史評價，就常常把中國古代數學處於應用技藝層次看作是它的自身的一個特徵，貶者認爲中國古代數學重應用，重實際没有理論是一個應用題式的集合，褒者則引例論證中國古代數學存在理論體系和邏輯體系。如果從中西古代數學在文化層次的差異來分析，顯然對中國古代數學的貶褒雙方都把古代數學的價值取向和數學自身的内在規律混在了一起。數學的價值取向是一種文化的給定，它無法符合數學内在規律的評價規則。同樣，數學自身規律的比較也必須放棄同一種文化中的數學價值觀念來評價另一種文化中的數學價值觀念作法[5]。

3. 在數學教育的層次上

中西古代數學在文化系統中的地位差别，使它們進行教育的目的和效果也明顯不同。

在數學教育的歷史上，中國歷史上開展的比較早也比較廣泛，但是中國古代數學的教育主要是傳授一種應用的技藝，而不是教授一種解釋世界、構造世界萬物萬事的思維方法。中國教育中傳授解釋世間一切現象的方法是由儒家的《周易》來完成的，北齊顔之推的《顔氏家訓》對數學教育的目的和效果作了最好的説明："算術亦是六藝要事，自古儒士論天道、定律曆者皆學通之，然可以兼明，不可以專業"。

古希臘的數學教育與中國古代數學教育的目的和效果截然不同，古希臘是從一種宗教情感或者從一種哲學思辯的意義來進行數學教育的。數學在西方文化中是一種思維方式而不只是計算方式，西方直到本世紀初還把數學與哲學看作是個範疇。古希臘直至西方的數學教育都帶有理性思維方式教育的特徵，學習數學不只是爲了一種應用，而主要是爲了理解世界，這一點是中國古代數學教育中從來没有的，這點也正是中西古代數學文化差異所造成的。

從教育的方法和形式上分析，我國目前的數學教育與西方的數學教育没有太大的區别，但是歷

史遺留下來的文化傳統，使我們今天仍以一種技藝應用的意義來看待數學教育。我們現在還沒有看到數學的理論、思想、方法作爲一種民族文化的理性意識，我們還沒有看到數學教育作爲培養人才素質的必要性[6]。

西方在蘇聯衛星上天，驚呼自己落後之時，第一個反應是數學落後了，要把數學搞上去，要搞好數學教育。但是，在我們現代科技落後的狀態下，幾乎沒有人强調數學教育對提高民族科技水平的意義。由此可見，中西古代數學在文化層次上差異，不僅是對數學史的研究有影響，而且對我們當前進行的數學教育也有影響。

參考文獻

1.《左傳·僖公十五年》

2. 王憲昌.《九章算術》研究中的文化觀，《北京師範大學學報》(自然科學版)91年增刊3

3. 王憲昌.《數學與人類文明》，延邊大學出版社，1990年，38～53

4. 羅素.《西方哲學史》上卷(中譯本)，商務印書館，1986年，64

5. 王憲昌.試論中國古代數學的某些評價觀點，《科學技術與辯證法》1992年2期

6. 王憲昌.數學教育與傳統文化，《數學教育與寫作文集》，吉林大學出版社，1990年

傳教士與士大夫

——以湯若望爲例

尚智叢

(内蒙古師範大學科學史研究所,呼和浩特,010022)

湯若望,1592－1666,德國人,原名Johann Adam Schall Von Bell,1622年入華,餘生在中國度過,其爲明末《崇禎曆書》主要修訂人之一,並於入清之後歷任欽天監監正,至1664年革職入獄,爲順治朝與康熙朝早期歷年《時憲曆》編訂主持人。他的工作傳入了西方古典數學、天文學,並以其在欽天監之授業與影響,鞏固了西方數學、天文學在中國官方學術中的地位。此影響之大使他成爲繼利瑪竇之後來華西人中最重要的人物之一。《清史稿》爲其列傳[1]。湯若望作爲早期來華西人代表,其活動充分體現着早期來華西方傳教士之特點,對他的活動加以分析,對進一步研究西方數學、天文學在中國的影響是有必要而有益的。清末以來不斷有人研究湯若望的著述與活動,但真能將之置於中國官僚與文化環境中,加以研究和評價的則極少。本文作此努力。

一、入華的宗旨

湯若望的祖先是遷居德國可侖城(Koln)的羅馬人,爲那裡的昌族。1592年5月1日,湯若望誕生於其城阿波斯特爾教堂附近其父的府邸中。他出生時正值路德宗教改革完成不久,新教確立了其在德國的地位,但勢力與影響遠不及羅馬公教[2]。湯若望鼎其家族傳統信仰,奉天主教。他幼年在家受教育,後入可侖城耶酥會所辦三王冕中學(Tricoronatum),學習論理學、物理學與形而上學。其間他曾加入天使兄弟會與貞德幼年會(Socialitas and Porthenica Minor)。1608年7月24日,湯若望入羅馬德意志學院讀論理學班,並習拉丁文,1611年9月畢業,加入耶酥會。1611－1613年,湯若望進入教會實習,1613年10月底,入羅馬學院,開始神學研究工作。1617年成爲神父。至此,湯若望接受了其時羅馬帝國所有的最完善的自然哲學、神學、形而上學與文學教育,並獲得了一定的教會工作經驗,成爲一名滿懷宗教熱情的教士。其時值天主教隨殖民活動向遠東擴張,1616年1月2日,湯向耶酥會長Mutius Vitelleschi呈遞了申請,願爲天主獻身,到中國或印度傳教。1618年,湯若望隨金尼閣神父,由葡萄牙啓程赴華,歷時四年,於1622年底抵杭州,1623年1月25日與龍華民抵京。

從上述湯若望之出身、所受教育與其來華背景,可斷定其來華宗旨:傳播天主福音。

二、在華之活動

湯若望在華,從1623年1月至1666年8月,歷時43年,其中大部分時間在欽天監活動,即從1630年12月入欽天監[3]至1664年9月革職,歷時34年。其間經歷了1644年的明清更朝。此前後兩朝對湯若望的態度有變化,總觀起來,可劃分其活動爲三期。

1.學習和自由傳教時期

1623年湯若望初入京時,值沈漼教案了結不久,但其時,明庭爲獲得葡萄牙的大炮,也留用有學問的傳教士。當時在京的有龐迪我、熊三拔、鄧玉函等。他們繼承利瑪竇學術傳教的作法,深得明庭與士大夫的欽佩,與士大夫們的來往頗多。湯若望初來,便被薦往兵部,但未就職。其時士大夫中

對始於1611年的改曆[4]議論紛紛，鄧玉函等人也作過中國曆法工作，並將之在士大夫中流傳。湯若望知遇當時的吏部尚書張光達，並爲之推算出1623年10月8日的月蝕。這使他大爲欽佩，說，"實在的，在這一世紀裡，中國已有了兩位學識與道德特別卓越的人物呈現了出來，第一位是利瑪竇，第二位就是這一位大師。"並欲薦其入曆局工作，但湯若望固守教會紀律而拒辭世俗官職[5]。這與其於入清之後，歷任欽天監監正，並積極活動，恰成鮮明對照。

從這裡可見：初入中國之湯若望仍然以自己爲一名恪守天主教信條與教會紀律之傳教士，而明庭與士大夫則以之爲一名有學問的士，欲攬之爲皇權服務。在此兩者表現出完全對立的傾向，這是由於中西道統與政統之不同而造成的。在中國歷史上代表道統的士族從未形成自己的組織，士以個人身份與代表政統的帝發生關係，或爲之師，或爲之友，或爲之臣。在諸侯割據時代，政統爲爭奪道統的支持，可能禮遇有學問之士，而在大一統時代，則政統壓制道統，使之不能動搖自身，即以之爲臣。所以，在明庭與士大夫看來，泰西而來的傳教士，不過是遙遠番邦的使臣，其學問與品德之高尚，止不過表明他是一賢明之士而已。因而，從利瑪竇起均被稱爲"遠臣"。這一點在李天經於崇禎八年所上"再題賜湯羅田宅"疏中體現最突出。他說："臣等猥蒙異數，而陪臣（指湯、羅——作者）殫殫其所學，拮据六載，曆務甫竣，繼以旁道，乃努力盡瘁，以願效忠於本朝者。顧使之肄業，無所恒產、無貲、非所以廣聖恩風遠人也……。臣聞繇餘戎之裔，秦用以霸，金日磾，西域之世子，爲漢名卿。即馬沙亦黑等，本回回族類，我太祖設專科以待之，且世其官，而存其業。苟有利於我國，遠近何論焉。"[6]

相反，在西方，教士形成自己的組織——教會，教會代表道統與代表政統皇權關係，皇帝爲獲得道統支持，必由教皇加冕認可，政統屈於道統之下，而教士祗爲教會服務。這與中國的情況正相反[7]。

可以認爲：從湯若望入華起，明廷與士大夫即錯認了其身份，雖知其來傳教，但却認其爲一名士，而從未意識到他對教會之隸屬關係。這一誤會鑄就了他在華所扮演之角色、決定了他在華活動之性質。事實上，這種錯誤認識也推及於其他傳教士之身，這一錯誤認識延續至清朝。

1623年1月——1627年夏，湯若望在京向徐光啓學習中文。1627年秋，受教會派遣至西安，主持教務，工作至1630年1月，期間勘察了兩條至羅馬的陸路，並譯成《主制群徵》一書。事實上，此八年內，湯若望之工作在明朝野上下均無多少影響。因而，明清史籍不見敘論[8]。但這八年中，湯學會了漢語，熟悉了中國風物人情及明庭與士大夫之生活。但其時，明庭及士大夫們不過以之爲一名隱而不仕的士。崇禎三年五月十六日（1630年），徐光啓上疏，議請湯、羅修曆，就完全是一副奏請皇帝擢用隱士爲官的口氣："臣訪得諸臣同學尚有湯若望、羅雅谷二臣者，其術業與玉函相埒，而年力正强，堪以效用，……，即今訪求速來。"[9]

2. 明欽天監內的工作

崇禎三年十月初二日，湯若望入欽天監供事，先在徐光啓，後在李天經主持下與羅雅谷共同修訂《崇禎曆書》。此爲其一生中的重要轉折。從此時起，他開始參與明廷事務，從而偏離了其神父身份。他之所以接受這一工作，是繼承利瑪竇學術傳教方法，以博取明廷及士大夫們的信賴，取得在華立足之地。

在欽天監期間，湯若望譯書撰表，"殫其夙學，製儀繕器，據以新法，融通度分時刻於數萬里之外，講解躔度交食於五載中，可謂勞苦功高矣。"[10]其又"講教監局官生，數年嘔心瀝血，幾於額禿唇焦"[11]。崇禎七年（1634年）底，《崇禎曆書》修完，並製成大量必要的天文儀器，這樣依徐光啓的設想[12]，在法原、法器、法數、法算諸方面，確定了一門完整、獨立的、不同於大統與回回兩曆法的天算科學。湯若望於崇禎四年——十七年（1631－1644）十三年間在欽天監著譯書籍，並指導監生所推算

曆書，製造儀器，共計圖書表六十一種一百五十六卷、儀器九種十三具，有成績卓著。與此同時湯與羅還在欽天監內培養了大批可依新法進行推算的監生。加之依新法推算結果與觀測往往密合，遠優於大統曆與回回曆。這使之在欽天監中佔有了顯著地位。其成績使明庭對之很爲信賴，名聲遠揚於士大夫之間。崇禎十七年正月初四日旨，賜湯若望匾額"旌忠"，充分顯示了明庭對此"遠臣"的贊許。如果說初入欽天監時，湯若望是在徐光啓或李天經主持下，應明廷要求而工作，那麽，到了明朝最後幾年他已積極主動爲明廷盡力了。崇禎十二年，因制造兵器與造幣之需，明廷迫切需要發掘銅、鐵礦，針對這一需求，湯若望主動編譯了《坤輿格致》四卷，進呈於崇禎。並於1642年在兵部造炮，訓練士兵使用，以御清兵與李自成。可見，此時他轉向於關心國家，效力朝廷。Alfons Voth S. J. 在其《湯若望傳》中也認爲："(此時)湯若望是中國國家公民，皇帝的臣屬。"[13]

3. *在清欽天監的工作*

1644年，李自成攻陷北京，明亡，隨即，滿清入主中原。

滿清入京不久，湯若望即上疏朝廷，請用其曆法。《世祖章皇帝實錄》卷五載"修改曆法，西洋人湯若望啓言，臣……曾用西洋新法釐正舊曆，製有測量日月星晷、定時考驗諸器，盡進內廷，用以推測，屢屢密合。近聞諸器盡遭賊毀，臣擬另制進呈。"[14]這是中國歷史上屢見之明臣選擇英主的作法。

而清廷也迅速接受了湯若望，《世祖章皇帝實錄》卷六載："修政曆法，湯若望啓言，……再照臣所修西洋新法，已蒙欽定爲時憲曆，所有應用諸曆，從此永依新法推算，其頒行民曆式樣，俟完日進呈。攝政王和碩睿親王諭：所進測天儀器準留覽，應用諸曆依新法推算，其頒行式樣，作速催竣進呈。"[15]

清廷迅速接受湯之因在於：

1. 滿族初入中原，權力仍集中於滿族貴族手中，他們並不很了解漢族文化，因而可不受之約束。新法、回回、大統，是置於同一水平而加以選擇的。

2. 湯若望的學問、品德，在明廷與士大夫之間頗有影響，此爲清廷所欽佩。

3. 新法新曆優於大統、回回兩曆，這是已由前朝觀測所證明了的。

4. 在封建中國，一部新曆法的頒布是一個王朝權力確立的象徵。它不但用於天象、節氣的推算，而且是指導民事、風俗禮儀活動的依據。因而，滿族入主中原後，爲穩定社稷，也急於頒布新曆法。

1644年底，清廷下詔封湯若望爲欽天監監正，從此，他開始了他的士大夫生活。其時清即已推行《時憲曆》，改曆工作即告結束，每年的曆法工作就是制定下一年的黃曆，預測日月食等天象，再就是確定國家祭祀時日及占卜吉凶。而這最後一項恰 是教會所明令禁止的迷信活動。然而，湯若望作爲欽天監監正參與了這樣的活動。湯若望在具體條件下的所作所爲與教會的意志背道而馳。同時，欽天監監正作爲臣子要對國家事務進行諫議，而湯若望也恰恰如此積極行事，這也背離了教會意志。這正是湯若望的活動在教會內引起争議的原因[16]。

湯若望以其學識、直言正確的諫議，逐步赢得順治與清廷的信賴。

順治初年，湯諫言，阻止攝政王大興土木，實施暴戾，以取民心。攝政王聽取了其諫言。他還幫助順治治理北京的商業，並阻止其勞民傷財地在長城外大規模狩獵。特别是1659年鄭成功圍攻南京，並殲滅清援軍，這使順治大爲惱火，欲親征。因國家建立不久，爲維持穩定，大臣們力諫阻之，然而，順治離服衆言。但"湯走至皇帝前，就跪於地上，把他的奏疏遞上去，並且，很誠懇地懇求，不要使國家到了破壞的地步。他寧願粉身碎骨，也不願不忠於他的職守，有所見不言。"[17]順治聽其所諫，並以其所提"重賞士兵"之法，擊敗了鄭成功。至此，湯已成爲一名寵臣與有影響的士大夫。

1646年7、8月間，順治加封湯若望"太常寺少卿皇帝祭祀"，爲正四品。

1651 年 9 月 15 日，又加封“通議大夫”“太僕寺卿”、“太常寺卿”，爲正三品。並同時加封其父母。

1654 年(順治十年三月初四日)加封爲“通玄教師”。

1657 年，賜“通政使司通政使”。

1658 年 2 月 2 日，賜“光禄大夫”一品，並於 1661 年按清廷慣例加封其祖三代爲正一品。

這樣，湯若望作爲一名士，在清朝之活動，獲得巨大成功。他雖然依舊信仰天主教，依舊從事教會工作，但他在朝廷上下的言行已完全溶於士大夫之中，正如順治所言：“事神盡虔，事君盡職，凡爾疇人，永斯矜式。”[18]

事實上，發生於 1664 年之“康熙曆獄”也正説明了上面的論斷。表面上看，“康熙曆獄”是發生於欽天監内關於新曆法與大統、回回兩曆法孰優孰劣的争論，但實質上是中國歷朝所演文字獄之一。止不過此文字獄非起於政統對道統的壓制，而是起於保守儒家學者與天主教争奪道統的控制權。

由於歷年觀測證明新法推算密合天象，此點全優於大統與回回兩曆，並且，順治初年，朝廷即已欽定依新法制《時憲曆》，因而，對曆法本身已無可争議，焦點集中於順治皇子榮親王之葬期擇日。而葬期擇日本源於明風俗禮儀，而這是由儒家通俗文化決定的[19]。楊光先借此爲打擊天主教勢力之一步。清入關後，處於漢族文化包圍之中，因而，很大程度上承襲明制。1644 至 1664 年近二十年間，清廷逐步削平戰亂，禮俗文化之正統的確立，便日顯其重要。

晚明時，兼容釋道的儒家思想相成爲中土的統治思想，而於此時入華之天主教與之大相徑廷，因而屢屢争端。雖然教士極力調和，但終難一致。保守儒家學者紛紛仇教，1620 年發生沈㴶教案。入清後，湯以其學識與品德贏得清廷信賴，日漸得寵。其在朝廷影響之大，使天主教在中土迅速擴張。這引起保守儒士的仇恨。同時，其作爲持天主教思想之士大夫，在朝廷之活動，勢必冲擊儒家對道統的控制權。他自然成爲保守儒士攻擊的對象。1664 年朝野上下仇教之風很盛了。

1664 年，滿漢大夫會審湯若望之罪名清楚表明“康熙曆獄”旨在打擊天主教。罪名爲：[20]

1. 其任欽天監監正，非爲國家出力，而欲建教堂，推廣天主教於中國，圖謀推翻統治。
2. 可疑之集會與集款項。
3. 以基督爲天主，誘人入教。
4. 散布聖像、教義，是魔術與陰謀不軌，天主教是邪教。
5. 主使駁斥楊光先。
6. 説人是天主造的，人不得不信天主。
7. 曆書以“西洋新法”字樣，爲中國人之耻辱，而其又不能證明此爲其前任所寫。
8. 誘人洗禮，補贖罪惡禮，涂信堅信禮。
9. 宣揚天空爲天主之府第，而非天主自體。
10. 反對中國禮法：燒紙、酒醮、肉祭以敬祖。

前兩條指責湯若望圖謀推翻清朝統治，此與事實不合，純係爲獲得清統治者支持而捏造，後八條完全是指責湯若望宣揚非儒家思想，對抗中國儒家通俗文化所定之風俗禮儀。

由於湯若望並不是以其天主教思想與傳教活動而取得清廷信賴，聞名於士大夫之間的。因而，曆獄一旦暴發，其即陷於孤立，在儒士强大的包圍與攻擊下而失敗。而且，是注定要失敗的。1664 年 4 月下旬(康熙四年三月十六日)對湯正式判決[21]，結束了他作爲士大夫的一生。他的失敗是由於他充當了天主教與儒家文化交戰的先鋒，而在這場交戰中天主教失敗了。

“康熙曆獄”打擊了在華天主教勢力，特别是中土信仰天主教者[22]。此後，雍正、乾隆、嘉慶歷朝，力禁天主教，儒家完全把持了中國道統之控制權。但湯若望開創的天文、數學工作並未結束，其

後繼有傳教士與中國天算家作此工作，如戴進賢、傅作霖、明安圖等。

1665 年 5 月連續出現慧星、地震、御殿城火灾，清廷認爲這是上天的警示，隨於 1665 年 5 月赦免湯若望，令其回家休養。1666 年 8 月 15 日，湯逝，29 日葬於北京二里溝。1669 年（康熙八年）曆獄翻案。1669 年 12 月 8 日，康熙祭湯若望，文曰："鞠躬盡瘁，臣子之芳踪恤死報勤，國家之盛典。"[23] 爲其恢復了士大夫重臣之美譽。

三、結論

從上文論述，可見湯若望在華活動之特點：

1. 初入中國，完全是一名恪守教律、信條的傳教士。

2. 在了解與熟悉中國文化、風俗及官僚制度後，便積極參與朝廷事務，以其學問照昭於時，逐步成爲一名有巨大影響的士大夫重臣。

3. 藉其影響傳教，但在其影響大到一定程度時，受到保守儒士之圍攻而失敗。

這些特點爲大多數明末清初入華傳教士所有。

参考文獻

1. 清史稿，卷 278

2. wulliston Walker 著，孫善玲等譯. 基督教會史，北京：中國社會科學版，1991，頁 379—433。

3、6、9—12. 四庫全書，上海書店影印本，卷 788，頁 106，頁 71，頁 18，頁 59，頁 71，頁 12。

5、13、17、20. Alfons Vath S. J. 楊丙辰譯. 湯若望傳，北京：商務印書館，1949，頁 99—100，頁 167，頁 289—291，頁 479。

4. [清]谷應泰. 明史記事本末，卷 73，修明曆法。

7. 余英時. 士與中國文化，上海：上海人民出版社，1987，84—112。

8. 謝國楨. 增訂晚明史籍考，北京：中華書局，1964，18。

14、15. 世祖章皇帝實録，卷五，頁 16，頁 4。

16. 同 5，"在後人毁譽中的湯若望"。

18、23. 同 5，頁 316，頁 537。

19、22. 黃一農. 擇日之爭與"康熙曆獄"，載臺灣清華學報，新二十一卷，1992 年 2 期，247—280。

21. 聖祖仁皇帝實録，卷 14，27—28。

數學史研究文集第四輯 84—90 1993 年 7 月

關孝和列和解高次方程典型算例賞析

沈康身

（杭州大學數學系，杭州，310028）

一

關孝和(1642? —— 1708)數學名家，他著作等身，1974 年已有《關孝和全集》問世，拜讀之餘，對關氏治學嚴謹，碩果甸甸，至爲欽敬，對全集中《括要算法》(1683)四卷尤爲嚮往，其中元卷爲垛積總術，所論自然數冪和公式對微積分的發展起重要作用。關氏所論，較西方伯努利(J. Bernoulli，1654—1707)《猜度的藝術》(Ars Conjectani，1713 出版)爲早，而且工作質量也領先，因爲後者止給出公式，並沒有推導，拙作"關孝和與李善蘭的自然數冪和公式"[2]論述東西方二數學大師異途同歸，在這一領域内的功績。亨卷爲諸約之術，論述一次同餘式及有關問題，拙作"秦九韶大衍總數術與關孝和諸約之術"[3]推崇秦、關二氏可相伯仲、關術在時間上雖遲於秦，但有其創見和特色，他在高斯(F. Gauss，1777—1855)《算術研究》(Disquisitiones Arithmeticae，1801)出版一百多年前道出有關解一次同餘式組主要情節。

二

《括要算法》利卷論角法。對此，關氏不厭其詳，探研正 n 邊形(n=3 至 20)邊長與其内切圓、外接圓半徑間的關係。他正確列出和數值解高次方程。次數有高達 18 次者，關氏對幾何學、代數學的造詣都達當時東方高水平。謹以學習心得再次撰文就正於海内外同行。本卷對正三角形至正二十邊形列有 17 道題：已知邊長 a(1 寸)求角中徑(外接圓半徑 R)、平中徑(内切圓半徑 r)。解題步驟都是先主天元一(設角中徑或平中徑爲 x)。根據題設條件列出開方式(多項式方程)，然後"翻法開之"(數值解方程)，以計算所求數。我們列表記關氏結果。

n	方程次數	$r=\frac{1}{2}a\,ctg\,\frac{360^\circ}{2n}$	$R=\frac{1}{2}a\,csc\,\frac{360^\circ}{n}$
3	2	0.288,675,134	0.577,350,269
4	2	0.500,000,000	0.707,106,781
5	2	0.686,190,96	0.850,660,808
6	2	0.866,025,403	1.000,000,000
7	6	1.038,260,698	1.152,382,435*
8	2.4	1.207,106,781	1.306,562,964*
9	6	1.373,738,709**	1.461,902,2
10	2.4	1.538,841,768*	1.618,033,988***

11	10	1.702,843,619**	1.714,732,766*
12	4	1.866,025,402*	1.931,851,652*
13	12	2.028,579,742	2.089,249,073
14	3.6	2.190,643,133	2.246,979,603
15	8	2.352,315,054*	2.404,867,172
16	4.8	2.513,669,746	2.562,915,447*
17	16	2.674,763,752*	2.721,095,575*
18	3.6	2.835,640,939**	2.879,385,241*
19	18	2.996,335,729	3.037,766,91
20	4.8	3.156,875,757	3.196,226,61

按 1715 年英國泰勒(B. Taylor,1685—1731)《增量法及其逆》(Methodus Incrementorum Directa et Inverse)論文發表,始明三角函數展開爲冪级數的方法。在此以前要使正多邊形半徑計算到十位有效數字,數值解方程是唯一可行途徑。而關氏當時計算工具僅有算籌而已,他能取得如許精密结果,誠嘆爲觀止。這 31 個答數有效數字多達 9 至 10 位。即使有誤差,偏差不大。我們用電子計算器核對,錯末尾一位(標 *)者 11 次,二位者(標 * *)3 次,錯三位者(標 * * *)1 次而已,我們選"已知正十一邊形邊長(1 寸)求其外接圓半徑"作爲典型例子來認真鑒賞。在讀關氏原文之前我們應先了解四事。其一,關流學派對正多邊形內切、外接圓研究甚爲深入。各種綫段都列專門術語。這兒引關孝和及門弟子建部賢弘(1664—1739)《大成算經》用語。圖 1 中 $A_0A_1A_2\cdots\cdots$ 爲某一正多邊形。a 爲其邊長,r、R 分别爲其內切外接圓半徑。而

一面斜:$A_0A_1 = a_1 = a$,　二面斜:$A_0A_2 = a_2$,　三面斜:$A_0A_3 = a_3,\cdots\cdots$

一面中寬:$OB_1 = r_1 = r$,　二面中寬:$OB_2 = r_2$,　三面中寬:$OB_3 = r_3,\cdots\cdots$

三面中報角徑:$OC_3 = OC'_3 = b_3$,　五面中報角徑:$OC_5 = OC'_5 = b_5,\cdots\cdots$

三面中報面:$C_3C'_3 = a'3$,　五面中報面:$C_5C'_5 = a'_5,\cdots\cdots$,

面之汎數:$e_3 = \frac{Ra_3}{a}, e_5 = \frac{Ra_5}{a}\cdots\cdots$。

其二,關孝和能發前人未道之秘 —— 這些綫段間的和諧關係[4]。

(1) $ab_3 = Ra'_3, ab_5 = Ra'_5, ab_7 = Ra'7,\cdots\cdots$

(由於 $\triangle A_0A_1O \backsim \triangle C_3OC'_3 \backsim \triangle C_5OC'_5\cdots\cdots$)

(2) $Rr_3 = rb_3, Rr_5 = rb_5, Rr_7 = rb_7,\cdots\cdots$

(由於 $\triangle OA_1B_2 \backsim \triangle OB_3C'_3 \backsim \triangle OB_5C'_5\cdots\cdots$)

(3) $b_3 = 2r_2 - R$(見圖自明)

$b_3 + b_5 = 2r_4, b_5 + b_7 = 2r_6,\cdots\cdots$

(由於 A_0A_4 平分 $\angle C'_3A_0C_5,\cdots\cdots, C'_3B_4 = B_4C_5,\cdots\cdots$)

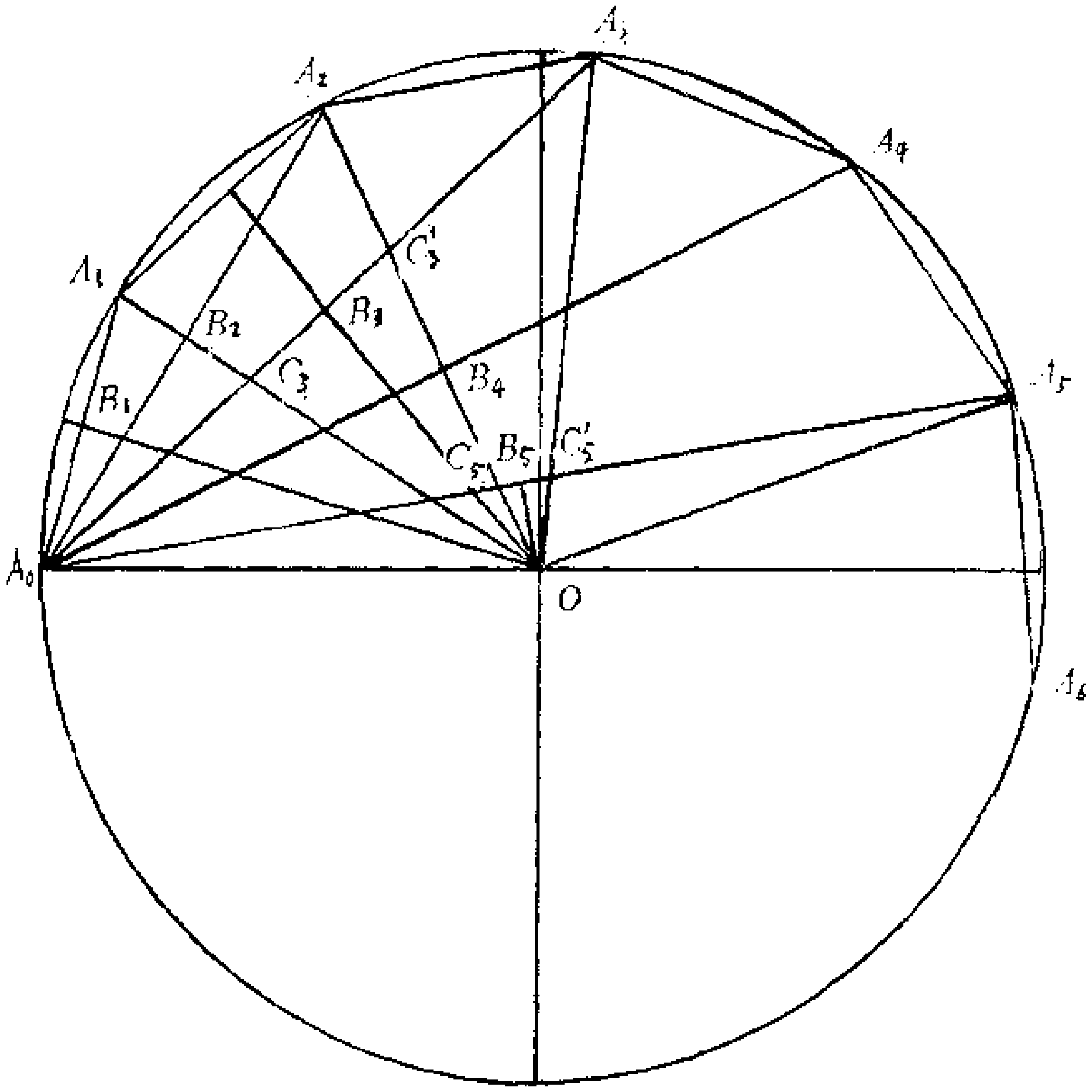


圖 1

(4) $e_3 = b_3 + 2R, e_5 = b_5 + 2R, e_7 = b_7 + 2R$,

(由於 $A_0A_2 = C_3C'_3 + 2A_0C_3$，這就是

$a_3 = a'_3 + 2a, Ra_3 = Ra'_3 + 2Ra$

從公式(1)得 $Ra_3 = ab_3 + 2_aR = a(b_2 + 2R)$，類似地

$Ra_5 = a(b_5 + 2R)$，……)

(5) $4r^2 = 4R^2 - a^2$(見圖自明)

$2Rr_2 = 2R^2 - a^2, 2Rr_4 = 2R^2 - a_2^2, 2Rr_6 = 2R^2 - a_4^2$，……

(由於直角三角形關係：$A_0A_1^2 = 2R.A_1B_2$

$A_0A_2^2 = 2R.A_2B_4$，……)

(6) $2ar = Ra_2, 2A_2r_2 = Ra_4, 2a_3r_3 = Ra_3$，……

(由於面積關係：$2OA_0A_1 = A_0B_2.OA_1 = OB_1.A_0A_1$，

$2\triangle OA_0A_2 = A_0A_2.OB_2 - A_0B_2.OA_1$，……)

其三，關氏原題附圖(圖 2)對有關綫段注釋子、丑、寅、卯等地支字樣，其含義作如下理解：

子：$OA = r_2$，	丑：$OB = r_1$
寅：$OC = r_4$，	卯：$OD = r_5$
辰：$OE = b_3$，	巳：$FG = \frac{1}{2}e_3$
午：$HK = a_2$，	未：$OL = b_5$

其四，在立天元式時，爲獲得等式，關氏運用幾何、代數變換，極爲精巧，已達爐火純青境界。在我明末清初中算衰微之際，關氏一枝獨秀，令人深有墻内開花墻外俏之感。

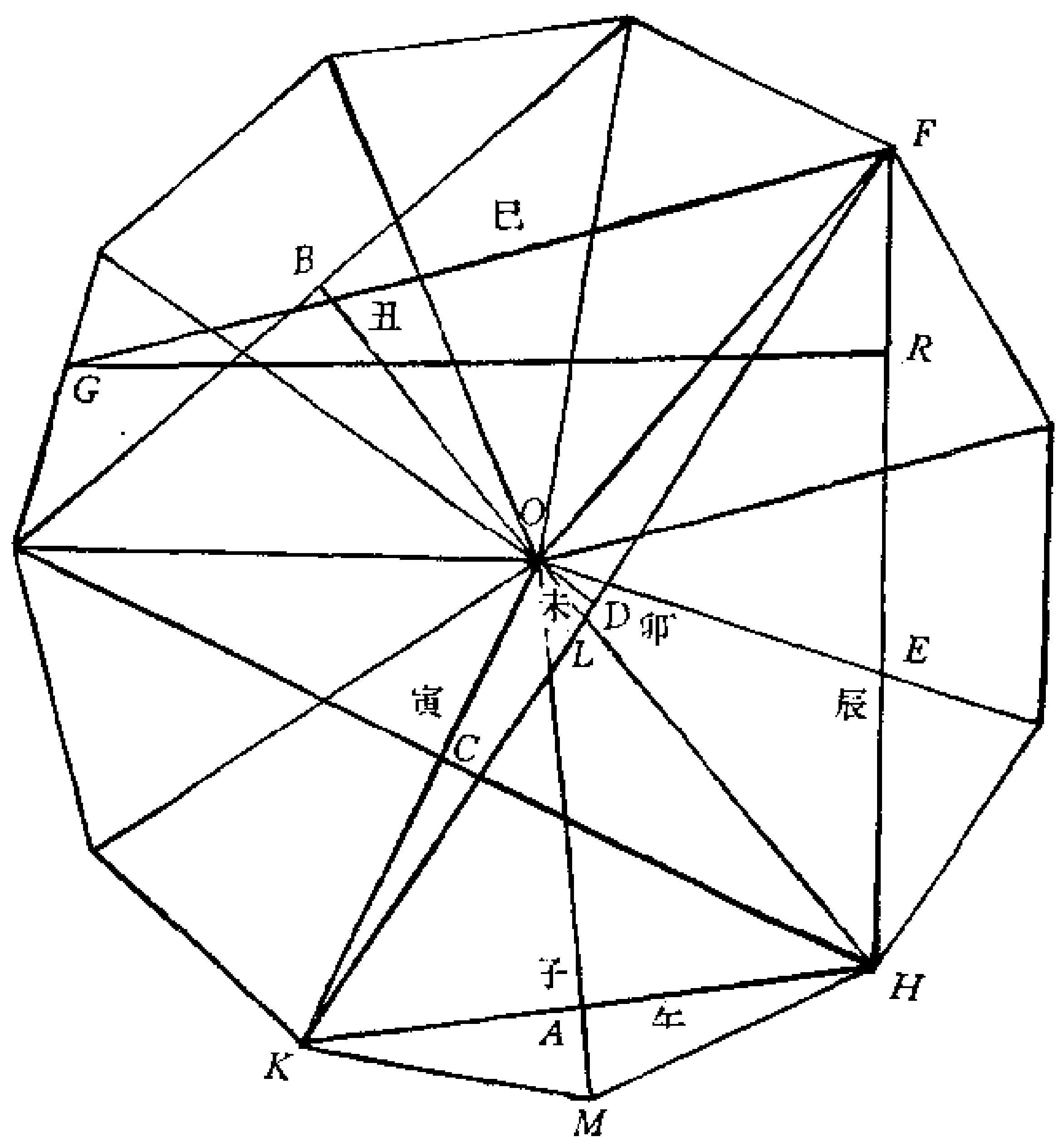


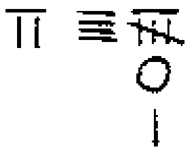
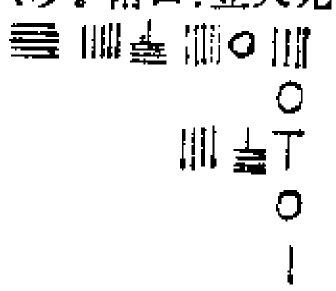
圖　2

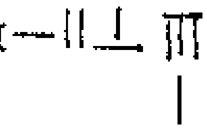
《括要算法》原文	今譯	今釋
今有一十一角，每面一寸。 問：…… 角中徑 …… 若干？ 答曰：角中徑一寸七分一釐四毫七絲三二七六六半弱。	現有正十一邊形，已知邊長 1 寸，求外接圓半徑 R。答 $R =$ 1.7147327665（寸）	
求角中徑術曰： 立天元一爲角中徑，四自乘之。爲因平中徑，因子，因丑，因寅，三十二個卯。寄甲位。	求 R 的方法是， 設 R 爲未知數 R^5 r、r_2、r_3、r_4、$32r_5$ $R^5 = 32rr_2r_3r_4r_5$（甲）	此等式得來甚妙。從公式(6) $2ar = Ra_2$ $2a_2r_2 = Ra_4$ $2a_5r_5 = Ra_10 = Ra_1$ $a_{11-n} = a_n$ 兩端各互乘，得（甲）

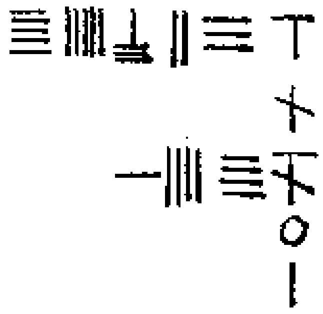
列角中徑，自之，內減面冪，餘爲因角中徑辰，寄乙位。	R^2 $-a^2$ $R^2-a^2=Rb_3$(乙)	爲得另一多項式以施行"如積相消"，關氏先設計(乙)：從公式(3)，(5)有 $Rb_3=R(2r_2-R)$ $=(2R^2-a^2)-R^2=R^2-a^2$
列角中徑，自之，得數倍之，加入寄乙位。爲因角徑二個已，寄丙位。	$2R^2$ $2R^2+$(乙) $2R_2+Rb_3=Re_2$(丙)	次設計(丙)；從公式(4)有 $R(2R+b_3)=Re_3$.
列角中徑，自之，四因內減面冪，以面冪相乘，爲因角中徑冪午冪；以減倍之角中徑三乘冪。餘爲因角中徑再乘冪二個寅，寄丁位。	$4R^2$, $-a^2$, $4R^2-a^2=4r^2$. $4r^2a^2$ $4r^2a^2=R^2a_2^2$; $2R^4-R^2a_2^2$ $R^2\cdot(2R^2-a^2)=$ $2R^3r_4$(丁)	又設計(丁)。 從公式(6)得知。 從公式(5)得知
列角中徑自之，以寄丁位相乘，以減寄丁位，餘爲因角中徑再乘冪未。	丁$-$(乙)R^2, $2R^3r_4-R^3b_3=R^3b_5$	從公式(3)得知。
以寄乙位、丙位各相乘之，又以四段平中徑冪相乘，爲因角中徑四乘冪，因平中徑，因子、因丑、因寅、三十二個卯寄左	R^3b_5.(乙).(丙).$4r^2$ $R^3b_5.Rb_3.Re_3.4r^2$ $=R^5.r.r_2.r_3.r_4.32r_5$ $=32R^5rr_2r_3r_4r_4$(左)	從公式(6)得 $R^2a=4a_2r_3r_5$, 從公式(4)得 $Ra_3=ae_3$. 從公式(2)得 $Rr_3=rb_3.Rr_5=$ rb_5. 于是 $R^5=4b_3b_5e_3r^2,R^10$ $=R^3b_5.Rb_3.Re_3.4r^2$ 而從(甲)；$R^5.R^5=32R^5rr_2r_3r_4r_5$

與左相消，得開方式 0 0 0 0	$R^3b_5 \cdot Rb_3 \cdot Re_3 \cdot 4R^2$ $- R^{10} = o$ 得多項式方程 $11R^{10} - 55a^2R^8 + 77a^4R^6$ $- 44a^6R^4 + 11a^8R^2$ $- a^{10} = 0$ 取 $a = 1$	從公式(3)得 $R^3b_5 = R^2 \cdot R(2r_4 - b_3)$ $= 2R^3r_4 - R^3b_3$ 而 $2R^3r_4 = 2R^4 - a_2^2R^2$…… 公式(3) $= 2R^4 - 4a^2r^2$…… 公式(6) $= 2R^4 - a^2(4R^2 - a^2)$…… 公式(5) $Rb_3 = R^2 - a^2$……(乙) 這就是 $R^3b_5 = R^4 - 3a^2R^2 + a^4$ $Rb_3 = R^2 - a^2$……(乙) $Re_3 = R(b_3 + 2R)$ $= 3R^2 - a^2$…… 公式(4)、(3)、(2) $4r^2 = 4R^2 - a^2$…… 公式(5) $R3b_5 \cdot Rb_3 \cdot Rc_3 \cdot 4r^2 - R^10 = 0$ $(R^4 - 3a^2R^2 + a^4)(R^2 - a^2)(3R^2$ $- a^2)(4R^2 - a^2) - R^10 = 0$ 取 $a = 1$ 展開爲多項式方程。
九乘方翻法開之， 得角中徑，合問。	數值解這十次方程， 得所求的半徑長。	

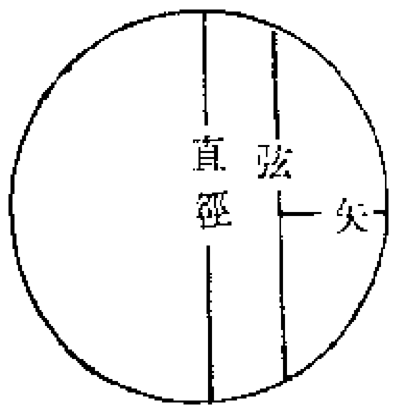
三

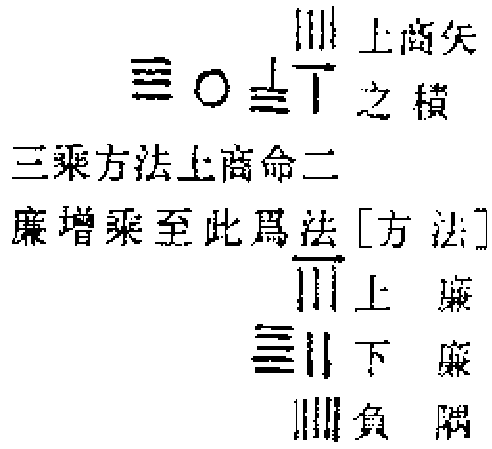
我國明代、日本爲江户時代，中算已輸入日本者，算經十書而外有楊輝算書(1274—1275)、朱世傑《算學啓蒙》(1299)、程大位《算法統宗》(1592)[5]。把關氏這一工作與中算文獻作一對比是饒有興味的。《算學啓蒙》卷下開方釋鎖門共 34 問，都用天元術列出方程。如第 22 題云："今有大小方田二段，只云大方冪内減小方面，餘一千二百六十八步。又云小方冪内減大方面，餘七百四十八步。問：大小方面各幾何？答曰：大方面三十六步，小方面二十八步。術曰：立天元一爲小方面 。自乘内減又云數，爲大方面  。自之，爲大方冪 

寄左、又列小方面　，加入先云數亦爲大方冪，與左相消，得開方式



三乘方翻法開之，得小方面，……合問，"從關孝和設題題文、答文、術文次序以及所用術語："立天元一爲……，寄左，與左相消，得開方式，九乘方翻法開之，得……，合問。"可見關氏列方程知識淵源，出於《算學啓蒙》，自無疑義。至於"九乘方翻法開之"具體步驟，朱氏書未載。而介紹增乘方法的楊輝《詳解九章算法》和介紹正負開方的秦九韶《數書九章》當時是否已傳入日本，至今未見著録。關氏於奈良某寺得讀中國算學書凡三年，僅屬傳聞，所讀何書，亦無可考[6]。查楊輝算書中有《田畝比類乘除捷法》，卷下"姑摘中山劉〔益〕《議古根源》。"楊輝爲"詳注圖草，以明後學，其餘自可引而伸之，觸類而長，不待盡述也。"其第18問云："圓一段，直徑十三步，今從邊截積三十二步，問：所截弦矢各幾何？"答曰弦十二步，矢四步。術曰："倍積自乘爲實。四因積步爲上廉。四因徑步爲下廉。五爲負隅。開三乘方除之，得矢。……草曰：倍田積自乘，得四千九十六步爲實，四因積步，得一百二十八爲上廉，别四因徑步，得五十二，爲下廉，置五算爲負隅。於實上商得矢四步，以命負隅五，減下廉二十，餘三十二。以上商四步依三乘方乘下廉，入上廉共二百五十六。又以上商四步乘上廉，得一千二十四，爲三乘方法，以上商命方法，除實盡，得矢四步……合問。"很可能關氏"九乘方翻法開之"是從此得到消息。楊輝舉一反三，關氏心領神會，不愧爲"引而伸之，觸類而長"的後學，他盡傳楊輝朱世傑天元術和開方釋鎖術並推廣解法從三、四次方程到十八次、答數的自效數字從一、二個到九、十個。





參考文獻

1. 平山諦等．關孝和全集，大阪教育圖書株式會社，1974
2. 沈康身．關孝和與李善蘭的自然數冪和公式，中國數學史論文集(三)，1987，82—93，日譯本發表在日本《數學史研究》，1987，通卷115號，21—36
3. 沈康身．秦九韶與數書九章，1987，285—298，日譯本發表在《數學史研究》，1986，通卷109號，1—23
4. 日本學士院．明治前日本數學史，第2卷岩波書店，1957，178
5. 李儼．中算史論叢第五集，176
6. 李儼．中算史論叢第五集，180

Wasan Methods and Their Geometries

Hiroshi Okumura
(*Gunma Prefecture Wasan Research Society, Japan*)

Japanese old mathematics so called wasan is abound with results in geometry. Most of the results appeared as problems such as: Given ***A***, ***B***, …, find ***X***. Therefore the figure of the problem does not need to be symmetrical or to have an interesting property. It is sufficient to give the conditions of the problem. We can easily find non—symmetrical complex figures in many problems, and most of wasan books are problem ones with figures with no relation.

Among such results, some were obtained by peculiar techniques or ways of thinking, which are called "*jutu*" or "*hō*". There are typical jutu or hō such as *Kyokugyōjutu*, *bōshajutu*, *and sampenhō*. Books or manuscripts discussing those jutu or hō collected thereby figures with some common properties that can be treated by their methods. From this point of view, they are forming, as it were, geometries of their own. We already referred to kyokugyōjutu in the first symposium.

Bōshajutu was founded by Ajima (1732 — 1798) and was developed by Umemura (1804 — 1884). It solved problems of touching circles through the tangents of two circles. One of the most elementary problems solved by the jutu is essentially stated as follows: *Let two circles **B** and **C** are touching a circle **A**, and t the tangent of **B** and C, and l the distance between the two points of tangency of **A**, **B**, and **A**, **C**. Find l in terms of , a, b, c and t, where a, b, c are the radii of **A**, **B** and **C**.* The answer is:

$$l^2 = \frac{a^2t^2}{(a+b)(a+c)} \qquad and \qquad l^2 = \frac{a^2t^2}{(a-b)(a-c)},$$

for Figure 1 and Figure 2. If we introduce the idea of orientation, these formulas can be unified. Similarly the formulas given by bōshajutu with different signs can be unified[1]. In this sense, the results by bōshajutu belong to geometry of oriented circles.

Hōdōji (1820 — 1868) also devoted his attention particularly to problems involving touching circles. His technique called sampenhō is very near to one of those of inversive geometry. One of his typical problems is this: *Let a circle **B** touch a circle **A** internally, and C_0 the circle touching **A** and **B** with the center on the line joining the centers of **A** and **B**, C_1 the circle touching **A**, **B** and C_0, C_2 the circle touching **A**, **B** and C_1, …C_n the circle touching **A**, **B** and C_{n-1}. Given the diameters of **A** and **B**, find the diameter of C_n* (Figure 3). Let us K_n be the image by reflection in the line joining the centers of ***A*** and ***B***. He considered the case in which the diameters of ***A*** and ***B*** are infinity, and gets Figure 4. In this figure, he essentially stated that the tangent of C_n amd K_n is equal to that of C'_n and K'_n without explanation, where C'_n and K'_n are corresponding circles in Figure 4 to C_n and K_n in Figure 3. He solved 8 problems of 11 problems in his manuscript[2], by similar technique transforming touching circles into parallel lines.

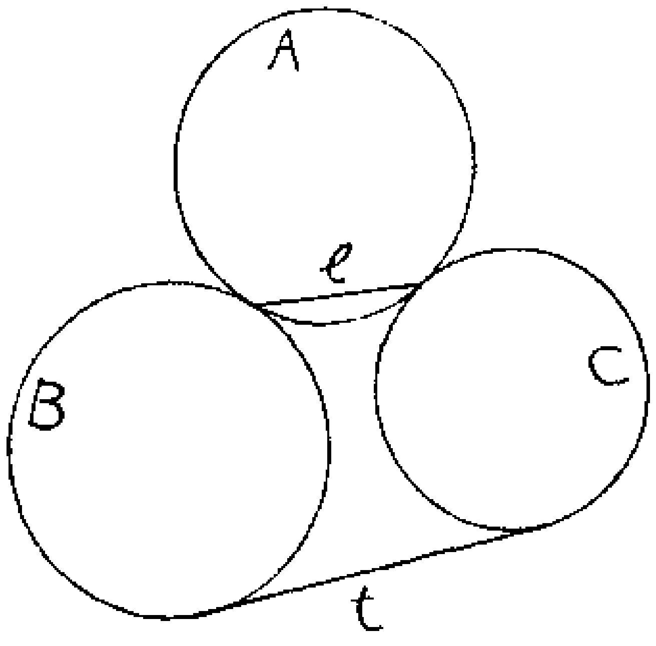


Figure 1.

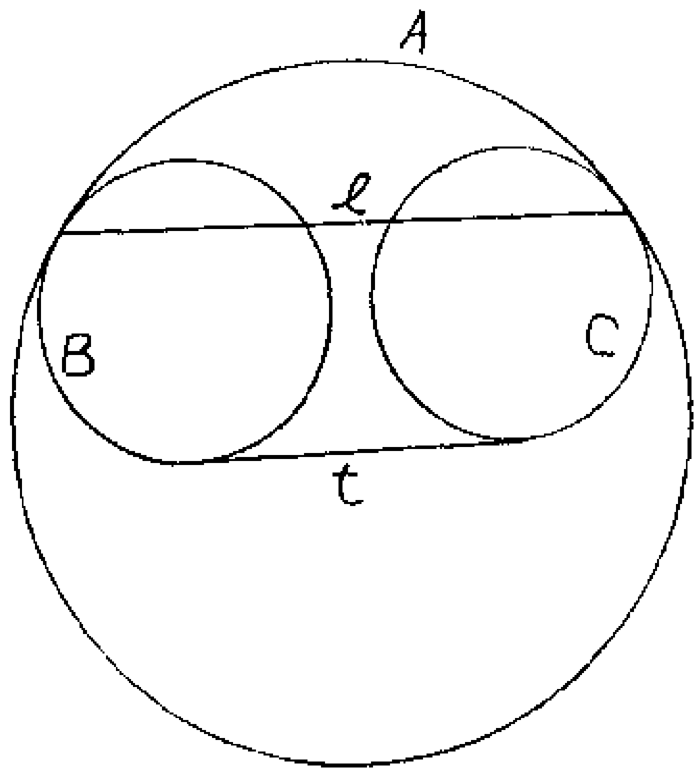


Figure 2.

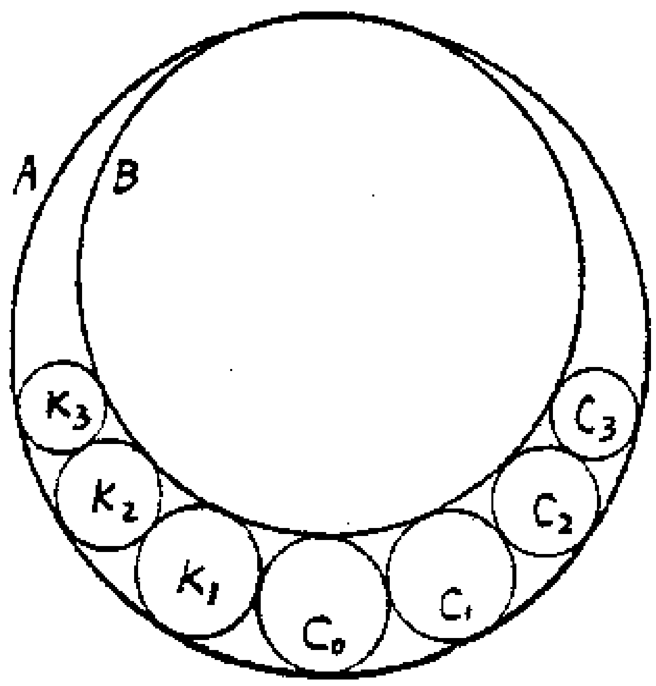


Figure 3.

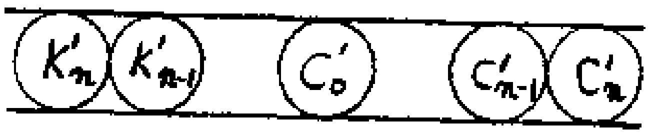


Figure 4.

References

1. H. Okumura, *Generalizations of the Results in the Old Japanese in circle Geometry by the Terms of Cycles and Rays*, Sūgakushi Kenkyū, No. 124(1990), 24—53 (in Japanese with English summary).
2. Hōdōji, *Kanshinkō Sampen*. 1860, (manuscript, there are several manuscripts of the same name).

HISTORY & COMPRISON OF ENTYU—SYASETU'S CUBIC FORMULA (Summary)

YUKIO NAKAMURA

(*GUNMA—KEN WASAN S. S*)

§ 1 Introduction

1885, KOTARO—KISI and his disciples dedicated SANGAKU to YAMNAA—HACHIMAN shrine in Takasaki—City. The first question is the problem which looks for cubic volume of cutting column, and the answer used to infinite series on mathematically.

By the way, going back to EDO periode, TAKAKAZU—SEKI who is the pioner of SEKI's mathematical school, offerd the same volume in KYUSEKI about1687.

This paper is the historical view and comparison between old and new formula with calculator.

Adding, I use the HIZUME style by means of hoof—form.

§ 2 Present's formula and Process

This is the last one at the another paper, according to a textbook. I don't Know when this formula is used in Japan. Well, the first edition of Mechanical Technology Textbook was issued 1934, but it passed 8 years , so it was made TAISHO term.

The process is shown in another paper.

§ 3 SEKI's formula

TAKAKZU—SEKI is the first man of SEKI—school and the greatest Japanese mathematician. I regret that I'll omit his historical life.

About 1687, he published KYUSEKI which is formula's textbook of surface and cubic volume. Question No. 27 is hoof—form's cudic, that is

$$(h/12c)\{a^3-6s(d-2c)\}$$

d: diameter h: height a: chord c: arrow

d—2c: distant diameter s: surface of arc

Some doctors have researched how to make it, but I don't speak the one in this time. I don't understand too.

Detail is shown data 1.

§ 4 MASANAGA—SAKA's formula

1781, when is about 100 years after Seki's KYUSEKI, Saka mentioned in SANPO—GAKKAI:

$$(h/8c)\{ad^2-(a^3/3)-s\,d(d-2c)\}$$

a; chord h; height c; arrow d; diameter d−2c; distant dia.
s; arc length

Details is shown separate table 1.

SAKA was born in Osaka, and a disciple of ASAKA−GORYU school.

The detail is Appendix No 2.

§ 5 Side surface of JYUEN−IWAI........Appearance of infinite series

1837, after about 50 years than SAKA, JYUEN−IWAI expressed the side surface area with infinite series in ENPI−HYOSHAKU. However, it is considered that the actual auther of this book is AKIYUKI−KENMOTI. I'll show you appendix No 3.

§ 6 UTIDA and HASEGAWA's formula

1884, UTIDA and HASEGAWA sought to get the side surface and the cubic of hoof form in "SANPO−KYUSEKI−TUKO". This is arranged by means of integral theory. I'll show you Appendix No 4.

§ 7 KISI and SAITO's formula

In Japan, they already accepted western civilization, and WASAN (i.e. Japanese Mathematics) was finishing. It was 1885~1887 wheh they offered SANGAKU to YAMANA−HATIMAN shrine in TAKASAKI−SHI, and wrote "SUPI−SEIKATU" which was amanuscript. They answered by means of infinitely cubic of 4 times hoof−form such as an attached table 1.

I described on the attached paper No 2 that this formula is correct.

Adding to say, GENSU (original number) multiplies CHO (=long or major) and HEI (=short or minor). See reference No 5 and No 6.

SAITO was an excellent man for ENRI (=circie principie) from the end of EDO to MEIJT, and KISI was one of the first class pupil in SAITO's school.

§ 8 Comparison of calculation

SEKI has an example, so I'm going to compare presrnt formula, SEKI's one and KISI and SAIYTO's one under the several conditions. The results were shown on the attached table 2. There is a little diffrence. I guess that the reasons are infinite series, accuracy of calculator, but I judged all right on the comparison.

§ 9 Conclusion.

I don't understand how to SEKI's formula is ied, however, starting correct theory, it was going on development and inprovement with new ideas. Especially, the last infinite series formula is difficult to us present day. It had finished correct more than 100 years ago. I proud of this matter for the world.

References

資料 1:《求積》關孝和先生第二百年祭紀念,《關流算法七部書》,東京數學物理學會,明治 40 年
資料 2:加藤平左エ門·《和算ノ研究:行列式及圓理》,開成館,昭和 19 年
資料 3:《圓理冰釋》劍持章行撰,岩井重遠訂,天保 8,前橋市立圖書館藏
資料 4:《算法求積通考》卷之三,長谷川弘閱,內田久命編,天保 15,日本學士院藏
資料 5:《群馬の算額》,群馬縣和算研究會,昭和 62 年
資料 6:《數理精活》,齋藤宜義閱,岸幸太郎編,稿本,日本學士院藏
《關孝和全集》,平山諦,下平和夫,廣瀨秀雄,大阪教育圖書,昭和 49 年
《算聖關孝和の業績》,加藤平左エ門,槙書店,昭和 47 年
《關孝和》,平山諦,恒星社,昭和 49,增補訂正
《明治前日本數學史》,日本學士院編,岩波書店,1960 年

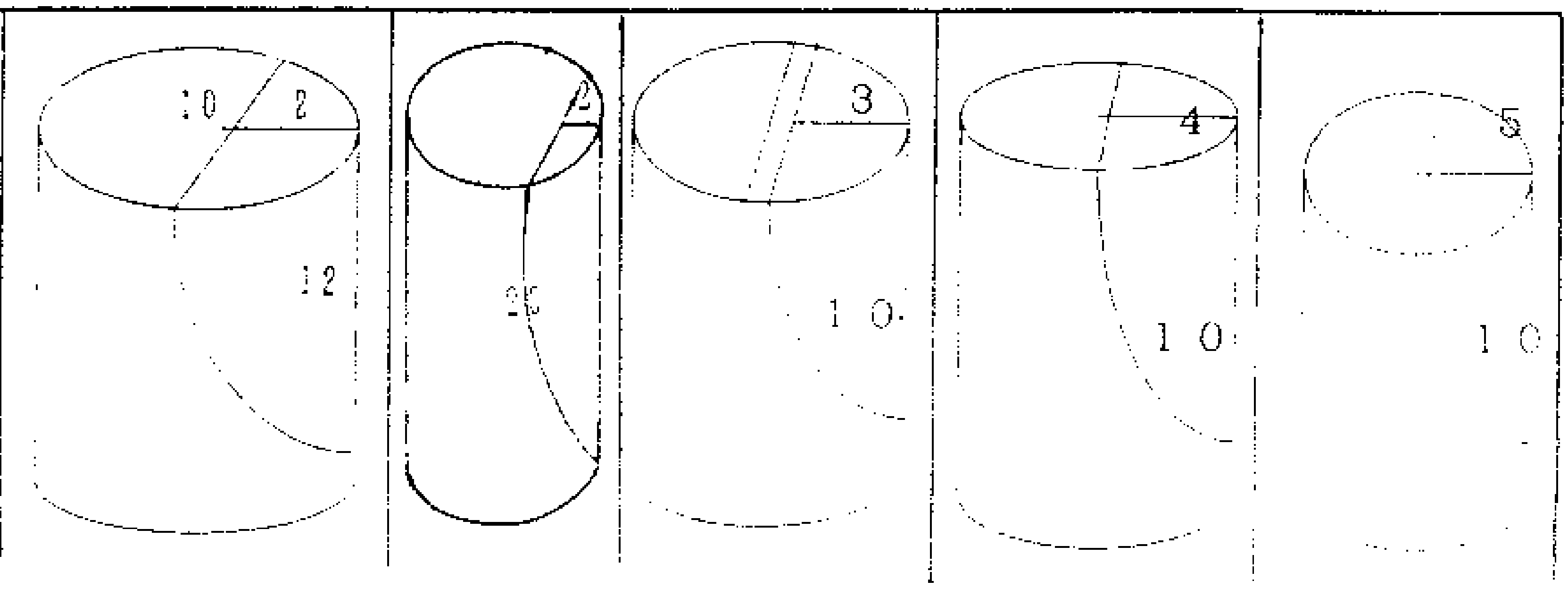
表 1　圓柱斜截形體積公式的變遷

年　代	提出者	所載書名	圓柱斜截形體積公式的現代形式
貞享 4(1687)?	關孝和	求積	截積 $=\frac{h}{12c}\{a^3-6s(d-2c)\}$　與條件 徑 d、高 h、矢 c 徑 $=d-2c$、 弦 a、 弧積 s、
天明 1(1781)	坂正永	算法學海	$v=\frac{h}{8c}\left\{ad^2-\frac{a^3}{3}-sd(d-2c)\right\}$ 與條件 弦 a、高 b、矢 c s 是弧長　(以上相同)　a　h　c 側面積　$A=h\left[s-\frac{(s-a)d}{2c}\right]$
天保 8(1837)	岩井重遠	圓理冰釋	側面積 $=\frac{had}{2c}-\Big[$原數$+\frac{1^2}{2.3}$(原數)率$+\frac{3^2}{4.5}$(一差)率$+\frac{5^2}{6.7}$(二差)率$+\frac{7^2}{8.9}$(三差)率$+\cdots\cdots\Big]$ $\frac{h.a}{c}(d-c)=$原數$(\frac{a}{d})^2=$率　〔 〕內是原數を　てすひぽ玄の弧背に等(1)

天保 15(1844) 弘化 1	内田久命 長谷川弘	算法求積通考	側面積 $=\frac{d.a.h}{2c}-\frac{s.\sqrt{d^2-a^2}h}{2c}$ 截積 $=\frac{側面積.d}{4}-\frac{a^3h}{12c}$
明治 18(1885) 20(1887)	岸幸太郎 齋藤義宜	山名八幡宮算額 數理精活	原數−(一差＋二差＋三差＋……＋) 這裡是圓柱形×4 的體積 $\frac{菱平}{2柱徑}=率$ 原數 $=\frac{8\sqrt{率}\times柱聖、菱長、菱平}{15}$ 一差 $=\frac{3(原數\cdot率)}{2.7}$、二差 $=\frac{(一差)率\cdot5.1}{4.9}$、 三差 $=\frac{(二差)\times率\cdot7.3}{6\times11}$
現代 (時間不明)		公式集 (機械工學便覽)	側面積 $s_0=(\frac{2rh}{b})\{(b-r)\theta+a\}$ 體積 $v=(\frac{h}{3b})\{a(3^2-a^2)+3r^2(b-r)\theta\}$

表 2　圓柱斜截形體積的比較

條件



現代公式	弦　a=4 矢　b=2 θ=0.927295218 體積 v=54.7171519	→ → → 91.1952531	2a=9.16516139 3 1.159279481 81.74129486	9.797958971 4 1.369438406 122.6167278	10 5 1.570796327 (π/2) 166.6666667
關的公式	離徑　=6 弧積　=11.1825 (11.1823045) 截積　=54.715 (54.7171519) (　)は修正値	→ → 91.1952531	4 19.81683564 81.74129485	2 29.33698066 122.6167277	0 39.26990817 166.6666667
坂的公式	弧長　=9.27295余 截積　=54.71725	→ 91.195余	11.59279481 81.74129488	13.69438406 122.6167278	15.70796327 166.6666667
岸/齋藤的公式	長　24 平　4 率=平/2 柱徑　0.2 原數 228.9733609 一差　9.8131440 二差　0.2725873 三差　0.0173464 四差　0.0015011 五差　0.0001541 以下略 穿通積 218.868628 圓柱斜截形 54.717157 (上之 1/4)	原數 20/12 以下略 91.19526	20 6 0.3 350.5424368 22.53487094 0.93895295 0.08962732 0.01163431 0.00179168 326.965559 81.7413898	20 8 0.4 539.6953873 46.25960463 2.56997803 0.32708811 0.05661140 0.01162420 490.470480 122.617620	20 10 0.5 754.2472332 80.81220357 5.61195858 0.89281159 0.19315635 0.04957679 666.687526 166.671881
備考	關的基本形	坂的基本形			$(2/3)r^2h$

On the Study of Trigonometry in Japan During the Edo Period

——Concern with influence of "Li shuan Chuan shu"《曆算全書》 and "Li xiang Kao cheng"《曆象考成》

Tatsuhiko Kobayashi
(*Jutoku Senior High School, Japan*)

1. Introduction

There were two means of introduction of occidental trigonometry into Japan, both of which were very restricted. One originated in Holland, the other from China. The Edo period in Japan lasted for about 250 years, from the beginning of 17th century until the latter half of the 19th century. From the first half of 17th century the policy of isolationism was enforced by the Tokugawa Bakufu Administration to restrict the spread of Christianity and to control foreign trade. But as the need for an accurate calendar became necessary the Tokugawa government permitted, in 1720, the introduction of mathematical and astronomical teextbooks, from China, as long as they bad no reference to Christianity. Thereafter a great surge of those related textbooks from China entered Japan and were studied by Japanese mathematicians called "Wasan—Ka"(和算家) and also astronomers. In China, then, fruits of the Western science had already been translated by Jesuit missionaries and Chinese sympathizers. Japanese who intended to do emendation of the calendar could catch such information through a small door of nagasaki; port for Holland and China.

In this way the Japanese became aware of the achievements of Europeans so that the study of plane and spherical trigonometry in Japan was commenced at this time, as an useful method of calculation of the orbits of the solar, the lunar and the planets. This paper deals with the Chinese influence on the study of trigonometry in the Edo period; under the policy of isolationism.

2. The Study of Trigonometry by Japanese Mathematicians

First we shall briefly refer to aspect of study of trigonometry in Wasan. A great feudal lord Ieyasu Tokugawa(德川家康) ruled this country in 1603 and as the peaceful age has came again, the Edo period's mathematics, that is, socalled Wasan, was born and bred.

In 1627, a very interesting mathematical textbook, "Jinko—Ki"《塵劫記》, was published by Mitsuyoshi Yoshida(吉田光由, 1598—1868) under the influence of "Suan fa Tong zong"《算法統宗》(1592) which may have been imported into Japan in about the beginning of the 17th century. In the twelfth chapter of "Jinko—Ki" in Vol. 2 we can see a problem titled as "Kobai no nobi no koto", or, the extension of pitch of a roof(see fig. 1).

Obviously this problem in advance calculate numerical values by using the Pythagorean theorem and then getting the answer by calculating ratio. However, as we discuss the problem by

modern senses, we can regard "nobi" as secant of trigonometry. And the diagram and tabular form in "Jinkou－Ki" give us suspicion that he had studied angles. Problem of surveying in "Jinkou－ki" also give us similar suspicions. Concerned with this matter, the author, M. Yoshida, does not disclose his background on anything. But we can not find in any place of this book that he had a concept of angle. And as we mentioned the values which were showed in the initial problem is calculated by using Pythagorean theorem, the later problem apply ratio.

In about 1722, Katahiro Takebe(建部賢弘,1664—1739),who was one of Takakazu Seki's pupil and also is a great mathematician in Edo period, left several manuscripts on $(\arc \sin x)^2$. In these manuscripts he showed talents as a genius and calculated the length of a chord and of a sagitta : versine or $r-\cos\theta$, not appear by cosine, and he framed small tables of eleventh－figure, the interval is one degree, in order to make a more accurate calendar. It is possible to declare that he is the first mathematician who made trigonometric function tables in Japan. These indicate that strong demands and needs of improvement laid among people at these time.

Although he created a sort of trigonometrical function tables, his new idea concerning to trigonometry and trigonometric function tables did not develop. Because, about these time;as K. Takebe born thought of trigonometry, the eighth Shogun Yoshimune Tokugawa (徳川吉宗) decreed a part of the book prohibition policy altered, in 1720. His order did not mean a complete change of the isolation policy, but since his order scientific books do not relate to christianity, even if they were written by Jesuits, were allowed to be imported into Japan. And a lot of mathematical, astronomical textbooks as well as surveying came into Japan from China. At that time various mathematical and astronomical textbooks introduced blane and spherical trigonometry including formulas and trigonometric function tables were imported from China. These were not in existence in Japan and were more accurate than K. Takebe made. In this section we should refer to the work of Takakazu Seki relating the trigonometry. However, because of limitations of space we can not go into them here.

3. Transmission of Occidental Trigonometry From China

At 1726 it was the beginning of new age. In this year under the relaxation of the book prohibition policy, "Li suan Chuan shu"《暦算全書》which Mei Wending's works (梅文鼎) were collected was brought into Japan. It is said that Mei Wending's work bear on almost all aspects of the Western mathematics which had come in at that time and moreover, he was not just collecting, he also did the initial task of assimilating it and some further research. Therefore many Japanese mathematicians could read "Li suan Chuan shu" without difficulty and helped make European science comprehensible to them, so it was kept as a valuable source of European in formation among them (see fig. 2). In here we can show a distinguished impression toward "Li suan Chuan shu". The most famous astronomer Yoshitoki Takahashi (高橋至時,1763—1804) said that "astronomical motion were constructed by the lunar、planets and fixed stars, difficult and complete. 'Li suan Chuan shu' gave details about them. Account of "Li suan Chuan shu" in regard to the method of the Western astronomy and its calculation is so useful and is a good book." It seem that his thoughts like this must have been remarkable and had great influence of others at

these time.

Soon after "Li suan Chuan shu" was imported the work began to be translated into Japanese by K. Takebe and Genkei Nakane (中根元圭) from 1726 until 1731.

But the compilers of "Li suan Chuan shu" did not include trigonometrical function tables in, although they actually set two chapters for them: "Ping san jiao ju yao"《平三角舉要》, elements of plane trigonometry and "Hu san jiao ju yao"《弧三角舉要》, elements of spherical trigonometry. So that in next year three books were rushed to Japan as follows:

"Ge yuan ba xian zhi biao"《割圓八綫之表》(Xu Guang Qi, 徐光啓)

"Ge yuan ba xian hu qiu fa"《割圓八綫互求法》(Xu Guang Qi, 徐光啓)

"Ge yuan gou gu ba xian zhi biao"《割圓勾股八綫之表》(Jean Adam Shall Von Bell, 湯若望)

So "Ge yuan ba xian zhi biao" and also "Ge yuan gou gu ba xian zhi biao" discribed trigonometric function tables we are able to declare that these were the first transmission from China.

The translation of "Li suan Chuan shu" completed in about 1728 and with entitled "Xinxie—yiben Li suan Chuan shu"《新寫譯本曆算全書》. The translated book presented to the eighth Shogun Yoshimune Tokugawa with an preface of K. Takebe, and is now preserved in the Library of the Imperial Household Agency. As we read it are awake to fact that in the presented books there are five—figure trigonometric tables for the eight lines cutting a circle, the interval is one minute. In the recent research by us we believe that all of these completely are transcription from "Ge yuan ba xian zhi biao" which were reproduced from "Chong Zhen Li shu"《崇禎曆書》.

As we mentioned above the first books, "Li suan Chuan shu", did not include the trigonometric function tables. By reading preface of K. Takebe we can recognize clearly that the reason why "Li suan Chuan shu" was imported into Japan was to enable a more accurate calendar to be made. So that he also stressed the importance of plane and spherical trigonometry in order to get more correct dates and to emend the incorrect calendar. In here at that time attitude of Japanese mathematician toward occidental astronomical textbook and first impression are clearly appeared, and from that time the learning of trigonomerty was commenced by pupils of K. Takebe: Genkei Nakane, Shinei Kouda (幸田親盈) and others with using the technical terms as follows: sine: "Zheng xian"(正弦), cosine: "Yu xian"(餘弦), tangent: "Zheng qie xian"(正切), secant: "Zheng gexian"(正割), versine: "Zheng shi"(正矢), cotangent: "Yu qie xian"(餘切), cosecant: "Yu ge xian"(餘割), coversine: "Yu shi"(餘矢) and they could easily understand the sine rule, tangent rule in the "Ping san jiao ju yao" as follows:

$$a/sinA = b/sinB = c/sinC$$

$$tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}tan\frac{A+B}{2}$$

In early time we can trace their works, applying trigonometry to observation of solar and lunar or to land surveying, in the remaining manuscripts.

The middle of 18th century in Japan was an age in which the people showed a great interest in the science and technology of the West. In such an atmosphere, in about 1781, "Li xiang Kao

cheng"was brought to Japan by Chinese traders. "Li xiang Kao cheng"《暦象考成》was compiled as one of"Lu li Yuan yuan"《律暦淵源》which were ready in the 60th year of the Kang Xi's reign (康熙帝),1721 and the book was printed in the first year of the Yong Zheng's reign (雍正帝), 1723. In this book, "Li xiang Kao cheng", there were lots formulas of plane and spherical trigonometry. It was very useful and important for the forecasts of eclipses, solsteces and equinoxes.

Rimei Honda (本多利明,1743—1820) was one of the most famous mathematicians in the Edo period and belongs the K. Takebe's family tree. He also is well—known as a person who studied Western sciences by means of the Dutch languane and as a statesman. While R. Honda study mathematics, Wasan, he wrore some valuable enlightenment books related to economic policy for natioal wealth, development of northern region of Hokaido and navigation: "Seii monogatari"《西域物語》(1798), "Keisei hisaku"《經世秘策》(1798), "Tokai shinpo"《渡海新法》(1804), "Taisokuhyo"《大測表》(1801?)and so on.

In these books here and there he quoted "Li xiang Kao cheng", together with other occidental textbooks which were translated into Chinese and also Dutch books. And in these he often stressed important and useful of "Li xiang Kao cheng" for understanding of the Western exact sciences. In our interest: Transmission and acceptance of trigonometry through Chinese, we must remarke on the two manuscripts, "Tokai shinpo"and"Taisokuhyo". These two books detail that how to navigate safely and find the island, missing boot and position in ocean. Concern with trigonometry in"Taisokuhyo" he introduce many formulas of plane and spherical trigonometry. For example, the cosine rule of spherical trigonometry is as follows:

$$vers\ A \cdot 1/2\{cos(b+c) + cos(b-c)\} = cos(b-c) - cos\ a$$

We can change above formula to

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

"Taisokuhyo" is believed as it have been written under influence of Dutch books, but that is not true. The methods of trigonometry in this manuscript are cited quite "Li xiang Kao cheng".

On the other hand, R. Honda has not interest only in trigonometry but also logarithm. At that time in China some mathematicians had already studied it and refered about merit of logarithm in calculation as follow: "change multiplications and divisions into additions and subtractions and it saves six or seven tenths of the work compared with the earlier procedures and in addition to that there is no worrying about errors in multiplication and divisions". We can show that, for example, the sine rule of spherical trigonometry

$$\frac{sina}{sinA} = \frac{sinb}{sinB} = \frac{sinc}{sinC}$$

was changed to

$$log\ sin\ b = log\ sin\ a + log\ sin B - log\ sin\ A$$

for calculation.

R. Honda noticed means of it when he read Dutch books or Chinese mathematical textbooks. He recorded methods of plane, spherical trigonometry, logarithm and made two tables for trigonometric function and logarithmic trigonometric function. As our next work, we are thinking of confirming that where he get his imformation about logarithm.

After R. Honda spread Trigonometry among the pepole, the study of "Li xiang Kao cheng" continued by Japanese mathematicians. Later about 90 years, the new age had already came: in Meiji era, a mathematician who is lived at Fukushima prefectural, Zenzaemon Ueno dedicated a mathematical tables at shrine in 1890. His problems discribed on the mathematical teblet were related with sine rule and one of formulars of right—angled spherical triangle. This matter prove enough that Japanese mathematicians has strong interest in "Li xiang Kao cheng" for long time.

4. Conclusion

In above chapter we sketched out transmission and acceptance of trigonometry which was imported from China. The 18th century was an age that Japanese awaked to the Western science and technology again. They paid to make effects learning and absorbing the Western knowledge related with ementation of the calendar. In such puocess it is obvious that the two books "Li suan Chuan shu" and "Li xiang Kao ching" gave great influences to Japanese mathematicians during the Edo period and these books took importance places in studying of trigonometry. And also we should stress, the occidental books which brought into Japan, not only refer to mathematics of astronomy, discharged a historical part to translate Dutch books and, more say, to understand European cultures. And it should say that these matters commenced from studying of Chinese occidental books.

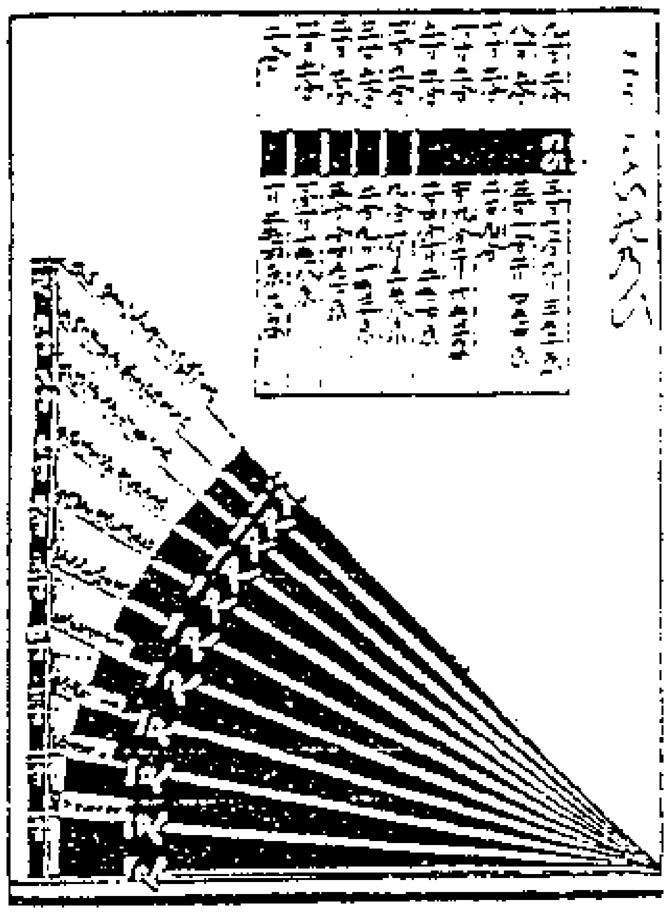


fig. 1

year	author	book
1767 (明和4)	Senno, Mikihiro 千野 乾弘	"算法指南"
1768 (明和5)	Senno, mikihiro 千野 乾弘	"算法開平立方法"
1769 (明和6)	Arima, Yoriyuki 有馬 頼徸	"拾璣算法"
1770 (明和7)	Senno, mikihiro 千野 乾弘	"捷径算法"
1770 (明和7)	Murai, Chuzen 村井 中漸	"開商點兵算法"
1780 (天明1)	Murai, Chuzen 村井 中漸	"算法童子問"
1787 (天明7)	Ishida, Genkei 石田 玄圭	"星学小成"
1810 (文化7)	Sakabe, Kouhan 坂部 広胖	"算法點竄指南録"
1820 (文政3)	Abe, Haruchika 阿部 晴親	"[illegible]"
1827 (文政10)	Shiraishi, Nagatada 白石 長忠	"社盟算譜"
1828 (文政11)	Shiraishi, Nagatada 白石 長忠	"温知算叢"
1830 (文政13)	Shinohara, Yoshitomi 篠原 善富	"三角法予習"
1830 (文政13)	Shiraishi, Nagatada 白石 長忠	"算法[illegible]"
1834 (天保5)	Hasegawa, Hiroshi 長谷川 寛	"算法點竄手引草"

year	author	note
1728 (享保13)	Nakane, Genkei 中根 元圭	"新写訳本暦算全書"
1780 (天明1)	Toita, Yasusuke 戸板 保佑	"八線表解并八線用方"
1804 (文化1)	Ono, Eiju 小野 栄重	"西洋[illegible]八線表"
1804 (文化1)	Ishiguro, Nobuyoshi 石黒 信由	"[illegible]"
1812 (文化9)	Sakabe, Kouhan 坂部 広胖	"管窺弧度捷法"
1826 (文政9)	Ikeda, Teiichi 池田 貞一	"割円通考"
unknown	Matunaga, Ryosuke 松永 良弼	"[illegible]"
"	Ajima, Naonobu 安島 直円	"弧三角解"
"	Ajima, Naonobu 安島 直円	"[illegible]求積術"
"	Ajima, Naonobu 安島 直円	"安子西洋暦考草"
"	Nakagawa, Junan 中川 淳庵	"[illegible]"
"	Yamaji, Koreyoshi 山路 之徽	"[illegible]"
"	Ishiguro, Nobuyoshi 石黒 信由	"測算全書"

fig·2

References

1, Li Yan and Du Shiran, translated by John N. Crossley and Anthony W. —C. Lun: "Chinese Mathematics—A Concise history—", Clarendon press, Oxford, 1987.

2, Yoshimasa Michiwaki and Tatsuhiko Kobayashi: "Influence of Li — suan Chuan — shu in Japanese Mathematics and Different Ways of Thinking Between Mei WenDing and Japanese Mathematicians", the Bulletin of the Department of Management and Information Science, Jobu University, No. 1, 1989.

3, Tatsuhiko Kobayashi: "on the Trigonometry in Li Shuan Chuan Shu and the Introduction of Trigonometrical Function Tables in the Chong—Zhen Li—Shu", Journal of History of Science, Japan, vol. 29(No. 174), 1990. (Japanese)

4, Tatsuhiko Kobayashi :"On the Circumstance of Translation of Trigonometrical Function Tables in 1727", Journal of history of mathematics, Japan, No. 129, 1991. (Japanese)

維 納 和 李 郁 榮

張奠宙　　李旭輝
（華東師範大學數學系，上海，200062）

本文叙述了控制論創始者 N. 維納與美籍華人科學家李郁榮的合作經歷，介紹了控制論産生的背景、李郁榮的生平與學術成就，以及維納和李郁榮在學術上的相互影響。

在 N・維納（Norbert，Wiener 1894—1964）的許多著作和一些紀念維納的文章中，都提到過一位華人——李郁榮（Lee Yuk Wing）。李郁榮祖籍廣東新會，1904 年 4 月 14 日出生於澳門。1920——1924 年，他先後就讀於廣東嶺南大學和上海聖約翰大學，1924 年又赴美國麻省理工學院（MIT）電機工程系留學，先後獲得理學學士（1927 年）和理學碩士學位（1928 年）。

李郁榮同維納的合作開始於 1929 年。那時，維納剛剛成爲 MIT 數學系的副教授，在廣義調和分析學上取得了一些重要結果，繼而把其中的基本思想引入了電網絡的設計過程。他考慮選用拉蓋爾函數來構作一系列標準電路，經適當組合後完成網絡的綜合，達到簡化工程設計的目的。爲了把設想轉變爲現實，維納請貝爾電話實驗室的 V. 布什（Vannevar Bush，1890——1974）博士推薦一名電機工程方面的優秀學生，來協助自己進行設計和試驗，布什推薦了正在電機系攻讀博士學位的李郁榮。



李郁榮（1904—1989）

後來的事實如維納所述，"這是布什替我做的最好的事情之一，我永遠感激他讓李在我指導下進行研究"[W1，P. 113]。一方面，李郁榮的言行穩重、果敢善斷與維納的性格互補起來，形成共同研究所必需的平衡；另一方面，李郁榮不僅理解到維納原設想的本質，還成功地運用數學工具，實現了對電子部件的充分利用和基本電路的有效組合。他在實驗室里工作了數月，建造出電網絡的模型，其功能達到了預期的水平，這就是李-維納網絡（Lee—Wiener Network）。後來，他們把這項發明出售給美國電報和電話公司，並在 1935 年 12 月獲得了美國專利。

李-維納網絡對四十年代維納研究防空火炮裝置、解决"黑箱"的分析與綜合問題發揮了重要作用[M1]。

根據與維納合作的成果，李郁榮在 1930 年完成論文《由拉蓋爾函數的福里葉形式對電網絡進行綜合》，獲得 MIT 授予的理學博士學位[L1]。畢業後，他進入紐約的聯合研究公司（華納兄弟創

辦),做了兩年工程師,主要工作是改進李-維納網絡。1932年,他回到中國,在上海的中國電業公司任電機工程師,參與了上海——南京無綫電話和電報系統的建設。次年,他與加拿大籍的伊麗莎白女士結爲伉儷。

1934年,剛剛成立不久的國立清華大學電機工程系開始擴建。系主任顧毓秀與李郁榮曾是MIT電機系的同學,經他邀請,李郁榮北上擔任了該系教授,並負責教務工作,在他們兩人的倡導下,清華電機工程系的教學宗旨、課程設置和教材內容都仿效MIT的體制,以教授爲中心、助教參與計算和實驗的科研體制也同時建立起來。李郁榮先後講授過"電機工程原理"、"電工數學"、"電子通信網络"等課程。1934年10月14日,"中國電機工程師學會"在北平成立,李郁榮成爲首批會員之一,學會會刊《電工》雜志還重新刊載了他的博士學位論文。不久,他又應用在MIT時所獲得的實驗數據,與顧毓秀,徐範一起探討了同步電機的電流問題[L2]。

還在美國時,李郁榮就曾對維納允諾,如果他回中國後謀到了穩定的職位,一定邀請維納到中國訪問,當李郁榮把這個願望講給清華的有關學者和負責人後,得到了大家的一致贊同。1934年底,校長梅貽琦和電機系系主任顧毓秀、算學系系主任熊慶來分別致函維納,聘請他來清華擔任這兩個系的訪問教授。就在電機工程系遷入新數學樓的第二天(1934年12月4日),李郁榮致信維納,表達希望他來華的迫切心情。信中寫道:

我相信,您和維納夫人及孩子們將會愉快地在中國逗留……離清華不遠,是有名的西山,您可以盡情地攀登游覽。在清華,有一群很友善的人,他們會十分樂意與您結交。這兒還有一批人在爲數學、物理和電機工程做着貢獻……有您的指導,加上您的靈感和思想,我們定能得到更多更好的结果[H1,P174]。

維納早就向往着有朝一日能訪問東方,衆人的熱誠相邀及與李郁榮繼續進行合作的願望,促使他登上了東去的郵輪。1935年8月,維納一家經日本抵達中國,李郁榮親自到天津船碼頭迎接,並在清華爲他們安排好起居生活,聘請了漢語教師,把維納的兩個女兒送入附近的小學。一切安置妥當之後,兩人又重新開始了他們的電路設計工作,事實上,早在天津火車站的候車室裡,李郁榮就向維納闡述了自己對合作方向與前景的設想。

當時,布什已經研制出初級模擬計算機,維納和李郁榮試圖改進布什機,采用高速度的電子綫路來代替低速運行的機械傳動裝置和簡單積分器。由於改進時將涉及一種裝置,要把電路的輸出信號作爲新的輸入信號反饋到過程之中,而這是一個全新課題,他們以前從未仔細考慮過,短時間內又難以解决,所以在北平着手進行的這項研究進展不大。

然而,這是維納第一次對反饋機構産生全面的興趣。過去在布什機中也有反饋部分,但機械裝置中的反饋功能很微弱。現在維納正面對電子綫路中較强的反饋作用,因而强烈地希望建立一套完備的反饋理論,這項在中國萌動的重大科學突破,後來終於在第二次世界大戰期間獲得成功,成爲控制論的核心內容和維納的重要成就之一。

在維納訪問清華期間,雖然對布什機的改進未見成效,他和李郁榮研制的新式繼電器却問世了。爲了申請發明專利,李郁榮曾數次前往美國駐天津領事館,不厭其煩地填寫表格,回答各種詢問,終於,改進後的李一維納網絡和這次的新式繼電器使他們在1938年又擁有了另外兩項美國專利[L6,P459]。

這一年中,維納還在算學系開課,講授復平面的福里葉變式理論和勒貝格積分理論,並開始了對擬解析函數的研究。李郁榮則在《國立清華大學理科報告》上發表了《兩列簡諧波的叠加》、《電網络合參變换舉例》等研究成果[L3,L4]。

兩人的學術合作是默契的,生活上也相處得十分愉快。李郁榮經常陪同維納進城觀光、購物,去

拜訪法國數學家J.阿達瑪教授。每當兩人在書房中埋首工作時,他們的妻子們便在隔壁交談或看書,夜深之後再喊他們出來吃點心、喝茶,最後四人以玩橋牌來結束這一天。

1936年夏,維納的聘期結束,他懷着留戀的心情離開了清華和李郁榮,取道上海前往挪威,參加在奧斯陸召開的國際數學家大會。回首這一年時光,維納感到對東方和全世界有了進一步的了解,自己的學說和成就也更具整體性了:"如果要爲我的科學生涯確定一個特定分界點……那么我應當選擇1935年,即在中國的那一年。"[W1,P171]

這以後,維納曾想重返中國,甚至鼓動馮·諾伊曼也到中國看看。然而,日本發動的全面侵華戰争,破滅了他們的夢想,也給李郁榮帶來了灾難。1937年夏,李郁榮夫婦到杭州探望父母,"七七事變"的爆發,使他們耽擱在上海而無法回到北平。就這樣,李郁榮離開了實驗室,靠着積蓄和經營古董生意在上海賦閑了數年。戰亂未能阻斷他與維納的聯係,1941年,一直關心着他的維納在MIT電機系爲他謀到訪問教授一職,並設法訂到兩張由香港赴美的船票。但就在船期臨近之際,日美間又爆發了"珍珠港事件",李郁榮的赴美計劃成了泡影,只得再次來到上海。這年秋天,他在大同大學電機系謀到教職,講授"電工工程學",後經聖約翰大學土木工程學院主任楊寬麟先生介紹,他又到該院擔任了兼職教授,開設電工學引論方面的課程(當時,該校尚未設置電工專業),同時,他還在數學系授課。

李郁榮爲人誠懇樸實,工作一絲不苟,給同事和學生們留下了良好的印象。惜時值日僞統治,社會動蕩,物價不穩,李郁榮不得不整日爲生活而奔波,加上妻子是加拿大籍,更有諸多不便。因此,抗戰勝利之際,當他獲悉MIT電機系仍留有職位並邀請他到任時,便於1946年初舉家再度赴美。

第二次世界大戰期間,維納參與了防空火炮裝置的研究工作。其中的核心問題,是研制最佳預測器,以求在誤差盡可能小的情况下確定炮擊目標的未來位置。維納把預測過程中的信息和噪聲都看作隨機過程,用統計方法將過程作內插和外推,借以預測未來的變化。同時,爲了以最優方式分離噪聲和信息,他又深入研究了濾波器理論,形成著名的維納濾波方法,而如前所述,維納關於反饋機構的理論也漸趨成熟。1948年,他的劃時代著作《控制論》正式出版。書中綜合了多年來他與有關學者在分析學、信息論、工程技術和生理學方面所取得的成就,還特别强調了他與李郁榮之間的合作對於控制論創立所起的重要作用[W2]。

李郁榮來到美國後,同維納的合作得到重新恢復。然而一個嚴重的困難是李郁榮在專業方面已荒度了十年之久,原先的課題已積累了浩瀚的材料,要盡快走到最前沿,可謂難上加難。於是,他們决定開拓新的研究領域,轉向通信工程中的統計理論。維納在1942年2月完成的著作《平穩時間序列的外推、内插和光滑化》已經爲此奠定了基礎[W3],李郁榮則擔負起兩項任務:1.從維納大致勾劃出的思想引申出關於通信工程的更具體的結論;2.向控制論領域的廣大工程師解釋這些思想和方法。

李郁榮一邊在電機工程系教學,一邊在MIT電子研究實驗室裡進行實踐。1947年秋,他爲研究生們設的"最優綫性系統"課程,介紹了統計理論在通信問題中的應用,這在當時的美國尚屬首次[L6,Preface]。實驗、研究方面,他的工作成果主要體現在:1.進一步探究預測和濾波的關係,推廣有關信息傳送、噪聲檢測的統計理論。他曾用新的誤差衡量尺度,設計出一種最優濾波器,得到了比維納濾波器效果更好的裝置[L4];2.根據維納創立的(自)相關分析法,把檢測周期信號的裝置——自相關器改進到使維納感到"驚訝"的程度。自相關器是維納等人研究大腦生理特徵所使用的主要工具[W1,P245],李郁榮也因此獲得了自己的第四項發明專利;3.在他和維納及研究生們的反復討論中,逐步建立了以頻率爲變量考察問題的頻域方法,同以往的時域方法相比,數學過程大爲簡化,更易於爲工程師們所廣泛接受,成爲經典控制論的主要方法之一[L6,P470]。1948年,李

郁榮被聘爲電機工程系副教授。1952 年 3 月,他取得了美國國籍[M2]。

在三、四十年代,維納關於濾波和預測的理論、方法主要針對綫性問題。控制論創立後,他寫信給 MIT 電子研究實驗室 的 J. 威斯納教授,闡述了對非綫性網絡的原始設想,建議李郁榮等人進行設計和實驗,並附了有關資料,由於這些想法牽涉到遍歷定理等高深的數學理論,李郁榮和同事、研究生們一時還不能理解,雖經仔細探討,也未能給出令人滿意的結果。不過,他們十分清楚這項工作的重要性,一直不懈地努力着。圍繞非綫性理論及其實際應用,李郁榮等在五十年代指導完成了十余篇博士論文[L7,P24]。1958 年初,由李郁榮提議,維納爲電機工程系的研究班作了有關非綫性理論的系列報告,李郁榮用録音、照像的辦法記録並整理出了 15 篇筆記。經過討論修改之後,這些筆記最終成爲維納研究非綫性系統的第一部專著——《隨機問題的非綫性理論》[W4]。

1948——1960 年間,李郁榮不斷地將維納的理論介紹給政府的和實業界的實驗室,發表過十餘篇論文;他還組織了一些卓有成效的夏季會議,在全美各地作過 70 多場報告,使通信行業的工程師們逐步了解和理解了控制論的觀點[M4]。1942 年維納的書[W3]問世時,很少有人能讀懂。經過這十多年的努力,新一代的工程師們都精通了這些內容,並開始沿着統計路綫進行研究,維納的思想滲透到人們處理通信問題的過程之中。

1960 年 7 月,李郁榮晉升爲電機工程系教授。他根據多年的數學科研經驗,整理出《通訊中的統計理論》一書,由約翰·威利父子公司出版[L6]. 該書處處爲工程師們着想,以簡易通俗的語言,細致地叙述了統計方法在通信工程中的應用。1963 年 2 月,國際天主教研究中心——比利時的盧汶公教大學授予李郁榮"應用科學榮譽博士"學位[M3]。

1964 年 3 月 18 日,維納在旅歐途中因心臟病突發而去世,終年 69 歲。美國"工業與應用數學學會"於同年出版了《諾伯特·維納文選》[S1],以示紀念。李郁榮作爲維納在工程方面的合作者和多年的朋友,受邀爲此書撰寫了《維納對工程中綫性和非綫性理論的貢獻》[L7],對維納在通信和控制工程上的成就及應用價值進行了詳細介紹。

1969 年 6 月,李郁榮從 MIT 退休,電機工程系又聘任他負責該系的研究生辦公室工作。1970 年任滿後,李郁榮夫婦從居住多年的馬薩諸塞州遷居到了西海岸的加利福尼亞州貝爾蒙特市。1989 年 11 月 8 日,他因患白血病去世,終年 85 歲。

伊麗莎白女士於 1988 年 2 月先於李郁榮去世,他們終生無子女。

對於李郁榮在科學以外的言論,我們所知甚少。現今可以查到的,僅有一篇 1935 年 1 月《清華副刊》對李郁榮的訪問記:李郁榮回顧了自己求學和從事科研工作的歷程,並特別指出,中國的工科大學生都有遠大的抱負,也很刻苦,主觀條件上並不弱於外國學生。他鼓勵中國學生要多動手實驗,加强合作,争取趕超國外的科研水平[R1]。

李郁榮最傑出的一位學生是 A. Bose 博士。他是 MIT 電機工程和計算機科學系的教授、Bose 公司的總裁,該公司制造的揚聲器和高保真音響設備在全球電器行業享有很高的聲譽。

(在本文的資料收集和寫作過程中,曾得到上海交通大學張鐘俊、清華大學孫敦恒、北京建築設計研究院楊偉成、同濟大學歐陽可慶、華東師大魏宗舒和袁震東諸位教授的熱誠相助,美國 MIT 的 Robert M. Fano 先生和 E. Andrews 女士提供了大量有益的檔案材料,在此謹向他們表示誠摯的謝意)

參 考 文 獻

H1 Heims, Steve J., John von Neumann and Norbert Wiener, MIT Press, 1980

L1 Lee Yukwing, Synthesis of Electric Networks by Means of the Fourier Transforms of Lagwerre's Functions, Jour. Math. and Phy. Vol XI, No. 2,1932

L2 ——,(with Ku, Y.H. and Hsu,F.)Analysis of Instantaneous Steady—State Currunt of Synchronous Machines Under Asynchronous Operation,《電工》Vol VI,No.1,pp 1—7,(1935)

L3 ——,The Superposition of Two Simple—harmonic waves, Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ., A3 pp65—75(1935)

L4 ——,Electric Network Parametric Transforms Examples, Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ., A3 pp417—425 (1936)

L5 ——,On Wiener Filters and Predictors, Proc. Symposium on Infor. Netw.,1954

L6 ——,Statistial Theory of communication, John Wiley & Sons, 1960

L7 ——,Wiener's Contribution to Linear and NonlinearTheory of Engineering,S1, pp17—33

M1 Masani, P.R., Norbert Wiener, 1894—1964, Birkhauser Verlag, 1990

M2 MIT Tech Talk, Nov. 15,1989,P6

M3 MIT Faculty and Academic Staff Records Office, MC 22 & AC 103, Institute Archives and Special Collections, MIT Library, Cambridge, Massachusetts

M4 Personnel Record for Lee Yukwing, Department of Electrical Engineering, MIT

R1 茹蒂、李郁榮博士,清華副刊43卷1期(1935),21—23

S1 Selected Papers of Norbert Wiener, Society for Industrial and Applied Maths and MIT Press, 1964

W1 N.維納,《我是一個數學家》,上海科技出版社,1987

W2 Wiener, Norbert, Cybernetics, MIT Press, 1948

W3 ——,Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, MIT Press, 1958

W4 ——,Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Press, 1958

《周髀》數理教育初步研究*

郭懷中
（安徽師範大學，蕪湖，241000）

衆所周知，《周髀算經》（簡稱《周髀》）是中國古代十部算經之一，是中國現存最早有體系的天文曆算著作，保存了中國古代宇宙論發展史的重要信息，在中國科學史上的地位至關重要。錢寶琮先生將它列爲十部算經之首，並指出算經十書中可以挖掘出很多對現代中學數學教學有幫助的東西，"例如趙君卿《周髀》注用面積圖形證明勾股定理和二次方程解法。"[1]餘下所言甚少。實際上，《周髀》是中國古代數理科學教育的重要文獻之一，反映了中國古代數理教育思想之精髓。本文對此試作初步研究。

一、《周髀》是古代一部數理教科書

我國教育制度由來已久，但古代數學教育僅限於小學，到隋代乃隸屬國學，《舊唐書·職官三》卷四十四曰："隋始置算學博士二人於國庠"。

唐初百餘年間，國家强盛，教育發達，此時雖因襲隋之舊制，但日臻完善。從中央到地方，已形成一整套相當完備的學校教育制度，且門類繁多，層次不一。實際上，唐代專業教育制度開始確立，設立了算學、天文、醫學等自然科學專業學校或專業訓練機構。這是世界上最早的實科學校，而歐洲在資本主義相當發達的十七、十八世紀之交，這類學校方纔出現，已晚了近千年[2]。唐代專業教育確立的同時，與其相適應的教學計劃、教材等應運而生。僅唐代中央學校的國子監中，就設有國子學、太學、四門學、書學、算學、律學。其中算學學制共七年，分科教授。《唐六典》卷二十一曰：

> 算學博士，掌教文武官八品以下，及庶人子之爲生者，二分其經以爲之業。習《九章》、《海島》、《孫子》、《五曹》、《張丘建》、《夏侯陽》、《周髀》十有五人。習《綴術》、《緝古》十有五人。其《記遺》、《三等數》亦兼習之。《孫子》、《五曹》共限一年業成，《九章》、《海島》共三年，《張丘建》、《夏侯陽》各一年，《周髀》、《五經算》共一年，《綴術》四年，《緝古》一年。

《舊唐書·職官志》、《新唐書·選舉志》等亦有類似記載。其算學考試亦分科舉行，《唐六典》卷二曰：

> 其明算，則《九章》三帖，《海島》、《孫子》、《五曹》、《張丘建》、《夏侯陽》、《周髀》、《五經》等七部各一帖，其《綴術》六帖，《緝古》四帖。

《新唐書·選舉志》曰：

> 凡算學録大義本條爲問答。明數造術，詳明術理，然後爲通。試《九章》三條，《海島》、《孫子》、《五曹》、《張丘建》、《夏侯陽》、《周髀》、《五經算》各一條，十通六。《記遺》、《三等數》，帖讀，十得九爲第。……

可見，無論是從課程設置，還是從考試、及第之要求，《周髀》都是當時重要的學習內容，是唐代數理教育中必不可少的教科書之一。

《周髀》獲此地位之後，經久不衰。在宋代，它仍是算學科的重要教材之一，對後世產生了一定的影響。不僅如此，因隋、唐數學天文教育深深地影響着日本的古代教育，作爲我國古代主要數理教材之一的《周髀》，在日本同樣是重要的教學內容之一，對日本古代科技教育的發展產生了一定的影

* 本文在寫作過程中，得到了導師李志超教授、張秉倫教授的精心指導，謹致謝意。

響[3].

二、《周髀》的數理教材特徵

從全書來看,《周髀》既有理論假設,又有實際操作和數學處理,其言數之理,言天之理,形成了一個有機的整體。特別是在它言之成理的邏輯形式中,已具有演繹推理的發達形態。例如,陳子曰:

> 日夏至南萬六千里,日冬至南十三萬五千里,日中無影。以此觀之,從極南至夏至之日中十一萬九千里。…… 凡徑二十三萬八千里,此夏至日道之徑也。…… 從夏至之日中至冬至之日中十一萬九千里。北至極下亦然。則從極南至冬至之日中二十三萬八千里。…… 凡徑四十七萬六千里,此冬至日道徑也。…… 從春秋分之日中北至極下十七萬八千五百里。

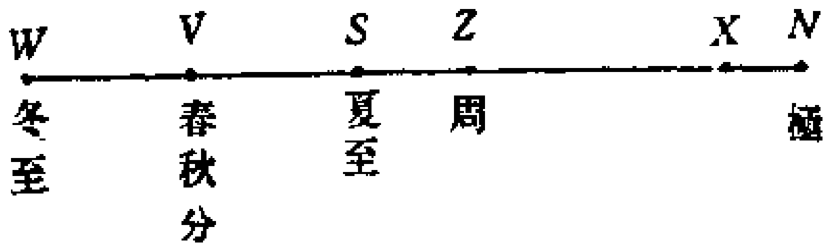
又曰:

> 春分之日夜分以至秋分之日夜分,極下常有日光。秋分之日夜分以至春分之日夜分,極下常無日光。故春秋分之日夜分之時,日所照適至極,陰陽之分等也。…… 故春秋分之日中光之所照北至極下,夜半日光之所照亦南至極。此日夜分之時也。故曰,日照四旁各十六萬七千里。

爲了便於討論問題,我們運用現代術語將上述引文重述如下:

根據天地平行假說,我們可以得到如圖所示的關係。令 R_s、R_w、R_v 分別表示夏至、冬至及春秋分的日道半徑,R 表示日光所照半徑,則

$$R_s = NZ + ZS,$$
$$R_w = NS + SW = NZ + ZW,$$
$$R_v = R_s + \frac{R_w - R_s}{2} = NZ + \frac{zs + zw}{2},$$
$$R = R_v - NX.$$



因爲八尺之表日晷"千里差一寸",而在周"夏至之日晷一尺六寸"、"冬至晷丈三尺五寸",所以得到 $ZS = 16000$ 里,$ZW = 135000$ 里。又"立表高八尺以望極,其勾一丈三寸",故得 $NZ = 103000$ 里、次又"璇璣之際爲陽絶陰彰",故知日光"不及天中一萬一千五百里",即 $NX = 11500$ 里。將 ZS、ZW、NZ 和 NX 之值代入以上各式,即可求得:

$R_s = 119000$ 里,　$R_w = 238000$ 里,　$R_v = 178500$ 里,　$R = 167000$ 里。

很明顯,這裡是從假說出發,運用邏輯推理和實際操作,試圖解釋自然現象。這可以說是中國古代較爲少見的演繹推理的發達形態。

上述結論在《周髀》中多次得到應用。例如,利用日光所照半徑和勾股定理不難證明:

> 夏至之日正東望,直周東西日下至周五萬九千五百九十八里半;冬至之日正東西方不見日,…… 日下至周二十一萬四千五百五十七里半。

從而使其理論自圓其說。

此外,《周髀》的語言精練。譬如:

> 數之法出於圓方。圓出於方,方出於矩,矩出於九九八十一。故折矩以爲勾廣三、股修四、徑隅五。……

三言兩語,簡明扼要,既指出了實際問題與數學問題的關係,又引入了勾股定理。雖然這裡引入的只是勾三、股四、弦五,而不是一般形式的勾股定理,但這恰與通常教材的簡單明了、由淺入深等要求相一致。在這個意義上來說,我們就不應斷定中國人當時只知道勾股定理的特例。實際上,由於《周

髀》中曾多次運用一般形式的勾股定理[4]，所以"勾三股四弦五"可以看成是一個"命名"。

總之，雖然《周髀》不具有現代邏輯推理的標準形態，但是作爲教材來說，它所具有的言之成理的、有機的理論體系，尤其是其中演繹推理的發達形態，都是非常重要的特徵。也正因爲如此，我們可以認爲《周髀》已初步具備了現代理科教材的某些特徵，符合教材的基本要求。同時還應指出，在三國趙君卿、南北朝甄鸞、唐李淳風等歷代之注中，《周髀》的這些特徵得到了進一步完善。所以我們稱《周髀》是古代一部重要的數理教材，應是無可非議。

三、陳子教育思想

作爲一本教材，通常除符合教育學關於教材的基本要求，還應反映一定的教育思想，《周髀》亦然。

《周髀》的數理教育思想非常豐富，本文着重討論其"思"與"學、博、習、知"相結合的教育思想（簡稱陳子原則）。

在榮方與陳子的對話中，自始至終貫穿着一個"思"。榮方向陳子求教"《周髀》之法"時，陳子曰："此皆算術之所及，子之於算足以知此矣，若誠累思之。"當榮方"思之不能得"，陳子則認爲此乃"思之未熟"。因此通"《周髀》之法"，"思"須貫穿其中。不僅如此，陳子進而論述了"學、博、習、知"之重要性，曰：

> 今子所學，算數之術，是用智矣。而尚有所難，是子之智類單。夫道術所以難通者，既學矣，患其不博；既博矣，患其不習；既習矣，患其不能知。故同術相學，同事相觀，此列士之愚、智、賢、不肖之所分。

這就從反面指出"思"不學不行，"學"不博不行，"博"不習不行，"習"不知不行，從而建立了"思"與"學、博、習、知"之關係，並且論證它直接與所學成就相關聯。

關於"學"與"思"，孔子曾精辟地論述過二者的辯證關係，曰："學而不思則罔，思而不學則殆"。（《論語・爲政》）又曰："吾嘗終日不食，終夜不寢，以思，無益，不如學也"。（《論語・衛靈公》）這裡"學"的含義有兩種：一是廣義的"學"，如孔子曰："君子食無求飽，居無求安，敏於事而慎於言，就有道而正焉，可謂好學也已"。（《論語・學而》）思與行包含在其中；二是狹義的"學"，就是"讀書"、"學文"等。稍後，孟軻（約372－289 B. C.）主張"思"以"學"爲基礎，而荀況（約313－238 B. C.）既重視"思"與"行"，亦重視"學"，指出："吾嘗終日而思矣，不如須臾之所學也"。（《荀子・勸學》）陳子正是强調"學"乃"思"之基礎，認真"讀書"、"學文"是求知之始。反之，"思"亦有助於"學"。

"博"與"習"既相互關聯而又有區別。"博"顯然要以"學"爲基礎，博覽群書。而"習"者，"精習"也。陳子曰："……是故能類以合類，此賢者業精習，知之質也；夫學同業而不能入神者，此不肖無智，而業不能精習。是故算不能精習，吾豈以道隱子哉。固復熟思之。"這裡指出了"精習"的內涵與途徑。

孔子曾主張"以博反約"，即以博爲基礎，按照一定的方法歸納整理，約簡成精要的知識。孟子進一步指出，"博學而詳説之，將以反説約也"。（《孟子・離婁下》）這是一種恰當的治學方法，深造的正確途徑。

《説文》釋"習"爲"數飛也"，徐灝箋："鳥肄飛也"。又《禮・月令》："鷹乃學習"。意即小鳥屢次拍着翅膀，頻頻學飛。《論語・學而》云："學而時習之"，即學者以時誦習之。《管子・度地》曰："請爲置水官，令習水者爲吏"。其中"習"有嫺熟、通曉之意。還有晁錯的"習地形，知民心"（《漢書・晁錯傳》）中的"習"亦爲此意。陳子的"習"既含"數飛"、"時習"之意，又有嫺熟、通曉之意。陳子的"業精習"相當於孔孟之"約"，對所學知識進行歸納整理，從博學中提煉精華，"知之質也"。這裡的"質"即是精華。

如何“精習”,陳子認爲祗有“熟思之”,别無捷徑可循。“熟思”者,勤奮也。關於“精”與“勤”,唐代著名教育家韓愈(768－824)的“業精於勤,荒於嬉;形成於思,毁於隨”(《進學解》)已成爲千古格言。可見,在韓愈之前約九百多年,《周髀》業已注意到了“精習”與“熟思”之間的關係,顯然應該予以重視。

《禮·學記》指出了古代一至九年的學習内容和程序,將其劃分爲兩個階段,一曰“小成”,一曰“大成”,陳子指出的“學、博、習”階段相當於“小成”,“知之質也”,還未能融會貫通。而達其“知”相當於“大成”。“知”即“知道”。何謂“知道”? 陳子曰:“夫道術,言約而用博者,智類之明。問一類而萬事達者,謂之知道。”

中國古代的“道”有很深的哲學内涵,對此姑且不論,僅就其教育意義而言,它一是具有方法、技藝的含義。孔子曰:“富與貴,是人之所欲也;不以其道得之,不處也”。(《論語·里仁》)二是指規律與事理。《易·説卦》曰:“是以立天之道曰陰與陽,立地之道曰柔與剛,立人之道曰仁與義。”有時則指思想或學説。孔子曰:“吾道一以貫之”。(《論語·里仁》)由此可見,“知道”應是一個具有豐富内涵的概念,即應知要領,窮事理,究根源,觸類旁通,“問一類而萬事達”。也就是説,陳子的“知”是具有較高理性的思維層次。

由上述可以看出,陳子原則已將教學中的學、博、習、知諸關係貫穿起來了。在某種程度上來説,可以認爲這個原則繼承和發展了中國傳統教育思想,反映了中國傳統教育思想在古代數理教育中的運用情況之一斑。

陳子原則在《周髀》中得到了靈活運用。如在解釋自然現象時,常取蓋天説、陰陽説之要點,使之融會貫通。這就更進一步豐富了《周髀》的教學内容和教育思想。

四、《周髀》是我國古代現存最早成體系的數理教科書

在我國古代衆多典籍中,現存早期的數理著作也只是屈指可數了。它們是《周髀算經》、《九章算術》(簡稱《九章》)以及新近發現的《算數書》等。

從成書年代來看,應以《算數書》爲最古。據錢寶琮考證,《周髀》成書年代約在公元前 100 年前後,或更晚些[5],而《九章》成書年代約在公元 50 到 100 年之間[6]。《算數書》是 1984 年在湖北省江陵縣張家山出土的漢簡算書,其成書年代要比《九章》早一個半世紀以上,故堪稱爲新發現的中國古代最早的數學著作[7]。

從具體内容來看,《算數書》總字數約爲七千有奇,篇幅與《周髀》相當。其内容大致以問題集的形式出現,共分 60 多個小標題,包含了整數和分數的四則運算,各種比例問題以及各類面積、體積的計算等。所以它主要是一部古代數學著作。與此相似,《九章》首先亦是一部數學經典,包括了 246 個問題,其中含有一些與《算數書》極相類似的文句。我們不妨認爲它已具有一個以計算爲中心、形數結合的數學體系[8],是中國古代數學體系之嚆矢,但其具體内容主要還是提供了解决實際問題的一些通用之法,或曰一般方法。尤其是在論天之理、論物之理諸方面,盡管在《算數書》與《九章》的具體内容中,或多或少有所涉及,但是它們明顯地遜色於以論天爲主的《周髀》。因此無論是《算數書》,還是《九章算術》,雖然都是我國古代不可多得的重要數學典籍,特别是《九章》的出現標志着中國特有的數學體系的形成,但是它們都未能形成像《周髀》那樣言之成理的、數理緊密結合的理論體系。

再從現有史料來看,《算數書》未曾列爲古代教科書。但《九章》的確與《周髀》一樣,亦是我國古代一部重要的科技教科書,且産生的影響久遠,在隋、唐時期也曾流傳至朝鮮和日本,其影響程度可能不在《周髀》之下。可是我們必須看到,在《九章》的正文中未能反映出與陳子原則相當的數理教育思想,以及前後貫穿一體的邏輯結構。

作爲教材而言,理論體系的邏輯性和教育思想都是必不可少的。反之,二者亦應是判斷能否稱其爲教材的重要標志。那麽,作爲數理教材來說,《周髀》恰恰在這兩個方面均比《九章》和《算數書》大爲優異。因此,我們認爲《周髀》是我國古代現存最早的有理論體系的數理教科書,是祖國科技教育的寶貴遺産之一。

参考文獻

1. 錢寶琮.校點算經十書序,算經十書,1963,北京:中華書局,6
2. 毛禮鋭等.中國古代教育史.北京:人民教育出版社,1979,289～298
3. 李儼.中算史論叢四上.中華學藝社,1947,265～267
4. 程貞一,席澤宗.陳子模型和早期對於太陽的測量,中國古代科學史論續篇,1991,日本:京都大學人文科學研究所,367～382
5. 錢寶琮.中國數學史.北京:科學出版社,1964,29
6. 同5,33
7. 杜石然.江陵張家山竹簡《算數書》初探,自然科學史研究第7卷,1988(3):201
8. 李繼閔.略論《九章算術》理論體系之特色,《九章算術》與劉徽,1982,北京:北京師範大學出版社,51～57

數學研究文集第四輯 114—116　　1993年7月

對《習算綱目》的初步研究

王桂芹
(長春師範學院，長春，130000)

楊輝，字光謙，南宋末錢塘(今杭州)人，生卒年及生平無從詳考，他不僅是中算史上一位著述甚豐的數學家，而且尤其是一位卓越的數學教育家，他搜集和閱讀了大量的數學著作進行研究，寫下了比較通俗的數學書五種，共二十一卷，即《詳解九章算法》十二卷(1261)、《日用算法》二卷(1262)、《乘除通變本末》三卷(1274)、《田畝比類乘除捷法》二卷(1275)和《續古摘奇算法》二卷(1275)，在《算法通變本末》卷上有一篇《習算綱目》[1]，爲初學的人擬訂了一個由淺入深，循序漸進的學習計劃，推動了數學知識的普及，並且闡述了各種乘除捷法，提高數字計算工作的效率，是我國第一個數學教學大綱。

一、楊輝的主張

《習算綱目》內容由易到難，循序漸進。楊輝將知識內容由易到難分成四塊：整數乘、除、加、減的概念及其簡單應用；分數的概念、運算法則及其應用；"開方法"及其應用和《九章算術》。至於幾何知識(其中主要是三角垛、四隅垛、體積的計算)則穿插於以上四塊內容中學習。

《九章算術》涉及的數學理論門類繁多，原書依題列術，按術歸類的安排體系，以及它的算法表達形式，使人難以了解其各種算法的數學原理及其內在邏輯聯係，《習算綱目》中安排在最後學習。

在教學方法上，楊輝主張循序漸進。精講多練，《習算綱目》中要求先念九九合數，次學乘除，然後學加減、九歸、求一等法，其次重點學分數運算，最後學開方，每個環節都制定了溫習和習題運算，之後學習《九章》。他主張先熟練運算後，再鑽研算理。他說："既識乘除起例，收買五曹應用算法二本，依法術，日下兩三問，且未要窮理，但要知如何發問，作如何用法答題，如何用乘除。"楊輝特別注重引導與啓發，例如，"海島題法隱奥、莫得其秘、李淳風雖注，祗云下法，亦不曾說其源。"

在學習方法上，楊輝提倡熟讀精思，融匯貫通。他主張學習要在廣博的基礎上深入，要着重於消化，例如，學習《九章》要在了解和掌握各類算法要領的基礎上。"更將九章纂類消詳，庶知用算門例，九章之意盡矣。"在學習計算技術方面，也反對死記硬背，他主張弄清知識道理，他的"辯因乘損三法即一。"就是要說明因乘、相乘和損乘三種方法在原理上的一致性，引導學生去比較它們的異同，掌握其實質以便靈活運用。"九歸"是學算難點，以往光背會口訣就非五、七天工夫不可，但在詳解算法九歸題術中細看注文便知用意之隙，念法用法一日可記住。這些方法，對當今的數學教育是有益處的。

二、《習算綱目》成因初探

宋代經濟繁榮，國內商業貿易比唐代有了更大的發展，城市迅速增加，是唐代的兩倍。海外貿易也特別發達，泉州、廣州、寧波、溫州、杭州等都成爲重要的對外貿易港口，宋政府沿襲唐代的制度設置了專門管理海外貿易機構，制定了統一的法令，實行了"抽分"的貿税，土木工程和水利工程較多，在建築和治水中，人們要求提高技術水平，宮殿建築或其它建築逐漸形成規格化，完成了《木經》、《營造法式》、《河防通議》等有關建築和水利的專門著作。這些書中都有許多計算問題，對數學提出

了新課題，如何可以使計算更加迅速準確、如何可以使人們更快的掌握各種計算方法以解決社會實踐中的主要問題。另外宋代在學術上有更多的自由，學術研究氣氛較濃厚，在這種有利的環境下，很多知識分子對數學進行了研究，北宋的劉益、賈憲、沈括，南宋的秦九韶、楊輝等數學家一方面著成很多著作，另一方面在學術上對數學深奥、神秘化的觀點進行了批評。如李冶在《益古演段》序中說"今之爲算者，未必有劉(徽)李(淳風)之工，而褊心踢見，不肯曉然示人。唯務隱互錯糅，故爲溟涬黯黮，唯恐學者得窺其仿佛也。"他在《測圓海鏡》自序中說："既已名之數矣，則又何爲而不可窮也。"這表明李冶反對當時用晦澀語言寫數學著作，故弄玄虚，把數學知識神秘化起來，妨礙數學知識的傳授。李冶的要求是"使粗知十百者使得入室啗其文，顧不快哉。"楊輝則認爲《九章算術》是一部數學經典著作，但不宜於初學，因而加以詳解改編，"今首以乘除加減方法，稱斗尺田爲問，編詩話十三首，立圖草六十六問"，又認爲《九章算術》"題問不歸章次，作《纂類》以辨其訛"。楊輝在《纂類》中將《九章算術》的題目重新分爲"乘除、分率、互換、衰分、叠積、盈不足、方程、勾股"等九類。楊輝的衰分章中就包括《九章算術》中的"衰分"、"均輸"二章，僅僅將《九章算術》的題目重新分類並没有降低題目的難度，因而不能滿足啓蒙的需要。正如楊輝在《日用算法》自序中說："夫《黄帝九章》乃法算之總經也。輝見機深法簡，嘗爲詳注。有客論曰：謂無啓蒙日用，爲初學者病之。"楊輝乃"吐胸中之靈機，續前賢之奥旨"，於 1262 年著成了《日用算法》以達啓蒙之目的，可是當時的教育體制仍然繼承了唐代爲少數人受教育的制度，雖然在學習内容上把較難的《綴術》和《緝古算經》免了，兼修取消，在學習年限上也有些變更，但其教學原則，學習内容和方法均不能與經濟發展的社會相適應。楊輝爲貫徹"助啓蒙之術"的思想，作了大量的實踐和理論工作，經過十二年的努力，於 1274 年著成了《乘除通變本末》，附在該書卷首的《習算綱目》從此問世。

三、《習算綱目》的現實意義

《習算綱目》規定了學習内容和相應的學習時間，闡明了選擇内容的原則，並提出了教學方法和學習要求，在許多方面與現代數學教學大綱相類似，特别是教學内容遵循由易到難，循序漸進的原則，知識内容的整塊出現，采用直進式的編排方式。不僅避免了内容重復，而且使知識系統完整，同時節省了時間。對數學知識的處理，既符合數學學科的結構特點，又符合人們的認識規律。

《習算綱目》的思想方法基本屬於應用數學體系，在進行計算時"程序化"成爲顯著的特徵，沿用"問一答一術"的形式，即包括問題、答案、算法三個部分，其中表示算法的"術文"就是一個計算程序。

《習算綱目》中的問題是爲了指導實踐，爲了便於人們掌握。注重由淺入深、舉一反三，前一部分是教學大綱，後一部分是數學教材，這種實施數學教育的作法對社會進步和科學技術發展産生了積極的影響。今天數學的用場已突破了自古以來人們所理解的狹隘範疇，它成爲自然科學、各門人文科學、社會科學的邊緣科學(交叉科學)滲入到各門科學之中，成爲發展現代工程技術，培養技術人材，掌握管理科學的重要工具了。爲了適應如此迅速發展的科學技術，迎接信息社會的到來，數學社會教育的普及實爲當務之急。當前我國社會、經濟、科學技術的不斷發展和進步，傳統的數學教育已不適應客觀的需要，楊輝主張在數學教育中，要求數學教材的内容必須是以社會實踐中提出的計算爲主。《習算綱目》中多次引用實例，如，"三角垛"體積計算、利息計算、税率計算等問題。目前，我國正實施義務教育，楊輝的數學教育是爲了使數學服務於各行各業，爲解決實際問題培養人材。他的這一目的觀，對於我們確立義務教育中的目的是很有借鑒意義的。因此，研究、繼承和發揚楊輝的數學教育思想顯得特别重要，其意義也更加深遠。

總之，《習算綱目》是楊輝數學教育思想的結晶，是我國中世紀數學教育的一部重要文獻。

參 考 文 獻

1. [宋]楊輝．算法通變本末卷上．中華書局,1—14
2. 李迪．中國數學史簡編,瀋陽:遼寧人民出版社,1984,177—186
3. 李儼．十三、十四世紀中國民間數學,北京:科學出版社,1957.4

徐光啓的數學理性觀與數學教育思想

張傑恒　許　康
(湖南大學數學系，長沙，410081)

摘　要　本文討論徐光啓的數學觀點中的近代成份，即現今我們所謂的數學理性觀的萌芽。此外本文還論述徐光啓已有數學教育在人類文明中的重大作用的近代意識，即他的數學教育思想已初具我們今天的現實價值。文章是在分析了徐氏大量言論之後得出論斷的。

徐光啓是傑出的科學家、工程師和譯著家，又是"中西科學的第一個交點"[1]的重要人物，對他的思想觀點進行再挖掘，以求得對這位歷史人物有更進一層認識，應該是有益的。本文側重探討徐光啓對數學的看法和他的數學教育思想，看他的數學觀對我們當今的數學教育有何裨益。

1. 中國舊的"藝"和世界新的理性觀點

在封建社會的漫長歷史時期中，我國數學常被思想界視爲"藝"或"術"，大抵與當時"辟土殖穀"和"作巧成器"的農業手工業的"農匠之術"同屬一隅，沒有甚麽大雅，同詩文經籍相比，地位要遜得多，個別"算學家"居位做官，往往由其他途徑得達，而非純靠數學才能所致。估量各家觀點，大致有如下幾種：

(1)孔子、周官的"六藝"、"九數"説——視爲知識、課程。把數放在禮樂射御書之後，然而儒家並無數學著作。據《禮記・内則》"六年教之數與方名；……九年教之數日，十年出就外傅，居宿於外，學書計"，並據《前漢書・食貨志》和崔寔《四民月令》，可知這"數"或"計"都是小學内容，只有五經纔是"大學"課程。至於"九數"，《周禮》並未細説，至鄭重、鄭玄纔認定爲"九章"，但通曉者不多，如《廣韵》只舉了幾位漢魏名人。

(2)周髀"算術"説——視爲方法、規範。《周髀》有"陳子曰然，此皆算術之所及"；《前漢書・律曆志》論記數、籌算時有"其法在算術，宣於天下，小學是則，職在太史，羲和掌之"；《文心雕龍・書記篇》進而解釋"術者路也，算曆極數，幾數乃明；九章積微，故以爲術"。

(3)劉歆"莫不用焉"説——視爲工具、手段。《前漢書・律曆志》中有"夫推曆、生律、制器、規圓、矩方、權重、衡平、準繩、嘉量，探賾索隱、鈎深致遠，莫不用焉"。

(4)孫子"萬物之祖宗"説——視爲宇宙的元素和根本。這與畢達格拉斯"萬物皆數"異曲同工。

前三種觀點都注重數學的實用價值。後一種未見於先秦諸子，而是在西漢儒教——與陰陽五行合流而神學化了的儒學且局部扭曲爲讖諱之學——的統治下，一部份數學家不得不爲真正的數學争地位，利用《周易》的術數成份從數理哲學方面稍作比附之説。這個策略也爲後世劉徽、孫子、秦九韶和程大位等采用，這些代表人物還各自受到所處時代談玄説理的社會風氣的影響，在思索數學的抽象性和邏輯方面超過前人。然而他們是清醒的，秦九韶説得很清楚："所謂通神明，順性命，固膚末於見"，所以看重的仍然是數學的應用，是"以擬於用"。結果，這種二元論並未能真正提高純粹數學在社會文化中的地位。而我們今天來看，"萬物之祖宗"説與"萬物皆數"説二者也有質的區别；後者强調數學的重要性是以其理性化自然哲學爲基礎的，由於事物在數量方面有着普遍性和共性，由於他們把數看作既是點又是物質的元粒，所以他們認爲數是宇宙的實質和形式、是一切現象的根源，

在社會文化中的地位。而我們今天來看,"萬物之祖宗"說與"萬物皆數"說二者也有質的區別;後者強調數學的重要性是以其理性化自然哲學爲基礎的,由於事物在數量方面有着普遍性和共性,由於他們把數看作既是點又是物質的元粒,所以他們認爲數是宇宙的實質和形式,是一切現象的根源,並把數學作爲培養人才的必備知識而視爲社會文化的需要;前者始則强調"算"的領導地位而顯得更超脱但又帶神秘性,繼則强調其應用性,終於落脚到教和學的實用目的。

這是因爲古代中國用竹籌,以籌運算,很自然地産生了十進位制,計算法的優越有助於對實際問題的具體解决。由此發展起來的數學形成了一個以構造性、計算性、程序化與機械化爲特色和以就問題解决問題爲目標的獨立體系。而古希臘則着重思維,追求對宇宙的了解,柏拉圖和亞里斯多德的深入探討確立了今天幾何學中的定義、公設、公理和定理等概念,還建立了哲學與數學中的分析法和綜合法的概念。《原本》的公理系統雖未盡完備,但它恰恰成了現代幾何學基礎論的先驅。直到十九世紀末,希爾伯特又將這些嚴密化,確立了今天歐氏幾何體系。由此發展成以抽象了的數學概念與性質及其相互間的邏輯依存關係爲研究對象的公理化演繹體系。

至於中國的古代數學教育,小學階段稍有涉及。按西漢末古文經學家借《周禮・保氏》加以宣揚的,似曾"賓興賢能、教習國子",其實在西漢太學並無記載,僅見於極個别的私學之中。劉徽已説"當今好之者寡",北朝《顔氏家訓》稱"算術亦是六藝要事,自古儒士論天道定律歷者,皆學通之,然可以兼明,不可以專業,江南此學殊少"。以後,也只在一部份政治修明的歷史時期如隋唐以及北宋的短暫年間有規模有標準地在最高學府國子寺或明算科進行正規授課,建立了完整的教材體制和考試辦法以外,其餘大部分時期都是讓它在民間私相授受,顛沛流傳,金元之交的李冶已慨嘆數學是"九九賤技",至明代科舉盛行,數學僅"委商賈駡輩,學士大夫耻言之,皆以爲不足學,故傳者益鮮。"[2]也就是除商業數學外,傳統數學幾乎成了絶學。

上述兩個方面的事實表明盡管象數神秘主義在西漢、南宋和元明曾幾度甚囂塵上,畢竟不是數學的主流和本質,因之我國長期對數學的認識的主要缺點是没有觸及纯粹數學本身,没有像西方那樣有衆多的哲學家的參加。按現代嚴格的意義講,就是"没有上升爲自覺自主的認識"[3]和没有"强調數學的重要性是以一套哲學體系爲基礎"[3]的,没有相對準確地回答"數學是甚麽"的問題;對數學的教育作用,其主要弱點則是長期偏陷於單純實用觀念,多數教材和教學往往"都不重視理論研究和演繹體系的建立"[4]以及没有强調"社會文化需要數學作爲培養人才的必備知識"[3]等。雖然歷史已經肯定我國數學和數學教育對世界有許多輝煌的貢獻,但這些缺點和弱點終於嚴重抑制了我國數學,使之未能在其發展過程中伴生出較爲完整的數學理性觀點及數學教育思想。

那麽現今所稱的數學理性觀是甚麽呢?怎樣看待數學纔算是看穿了數學的内在關係和外在關係呢?纔能稱得上抓住了本質呢?綜各家之述,大體説來就是:(1)數學是"實在世界最一般的量與空間形式的科學,同時又作爲實在世界中最具有特殊性、實踐性及多樣性的量與空間形式的科學。"[5](2)數學有自身發展的哲學基礎,即邏輯、直覺[6]和表現法則。(3)數學有一定的自我發展的動力。(4)數學有一定的自我繁衍的方法[7]。(5)數學有巨大的抽象概括能力,使事物得到最本質、最確定和最精密的表現[8]。(6)數學有自身的獨特的結構和存在體系。(7)數學有廣泛的應用與推動其他科學發展的能力。(8)數學對人類有偉大的教育作用。

這八類認識的總和大概可以定義爲認識數學的理性觀點,而就人類思想文明和精神文明來説,第八條還有特殊的獨立的宏大意義。用理性觀點看待數學,就會掌握數學的内在聯係和本質,才能正確地掌握、理解數學,數學纔是一門科學,數學教育纔有促使人類進步的現實意義。研究中國科技史卓具功勛的李約瑟教授説:"從許多方面來看,數學總是一門科學,它和整個自然科學具有同等的地位。"[9]"數學形成一門科學道理是由幾何學開始的"[10]。而幾何學作爲科學在西方看來又是由

《原本》莫基的,其標志是它樹立了一整套思維模式即公理化演繹推理的思想和方法、表述原則和體系的典範,且幾乎不涉及具體應用。

2. 徐光啓的數學理性觀之一

上面扼要陳述的"藝"與"理性觀",大體上是衆所周知且認可的事實。在我國,轉化舊的看法,融合理性看法,徐光啓是第一人,是數學方面改革開放的第一人。徐光啓在《幾何原本雜議》中對《原本》作了兩個著名評論,一個是"四不必",另一個是"四不可得"。其中的"不必揣"是説幾何學所講的道理十分明確;"不必疑"、"不必試"和"不必改"是説幾何學的結論十分準確,論證的方法十分有效;"欲脱之不可得"是説幾何學所講的規律十分普遍;"欲駁之不可得"是説幾何學的論述十分嚴密;"欲減之不可得"和"欲前後更置之不可得"是説幾何學的體系十分完整。在《刻幾何原本序》中,他又説:"物理之一端别爲象數,一一皆精實典要,洞無可疑,其分解擘析,亦能使人無疑"。總之這些評價是説明幾何學數學的真理性和嚴密性,説明邏輯體系之妙。

利瑪竇在《評幾何原本引》中説:"曰原本者,明幾何之所以然,凡爲其説者無不由此出也"。話雖出自利氏,且在徐利兩氏所采用的底本(當爲丁先生 1574 年的增補本)的封面上有拉丁文署名爲 EUCLIDIS ELEMENTORVMLIB. XV(意即《歐幾里得原本 15 卷》)類同於英文 ELEMENT,確有"原理"、"基礎"、"元素"等含義,但徐光啓既完全參與其事且爲漢文方面的首席,對這個頭等重要的名詞,以"原本"這個中文詞與之對等,其間的琢磨定奪,他至少必有很重大的貢獻。僅此一折,就大可説明他確實已領悟了幾何學是一門專講道理的學問。他在《毛詩六帖》中也説過"求其所以然之故"的一類話;特别,在《刻同文算指序》中,在談到我國古算"特廢於近世數百年間"的大問題時,指出主因之一是"謬言數有神理,能知來藏往"這種唯心的觀點起了毀滅性作用;在談到"當世算數之書"時,堅决指出了明代數學的缺點,批評其中的古算,即流傳下來不到十之一二的"古初之文"是"僅僅具有其法,而不能言其立法之義",指責其中占十之七八的"近代俗傳之言"爲"閉闗之術,多妄謬";在《測量異同・緒言》中,特别批評明代古算書"其義全闕,學者不能識其由"的缺點;同樣在《勾股義・緒言》中也指出"第能言其法,不能言其義也",這個缺點使得"所立諸法,蕪陋不堪讀"。這些都集中反映了徐光啓在《題測量法義》中所極力主張"法"要"系之義",否則就不"貴",就没有甚麽價值的正確看法。作爲對稱,他對西國的"理數"贊之爲"皆返本實,絶去一切虚玄幻妄之説","皆溯源承流,根附葉著",更可洞見徐光啓是重視數學要講原理的,纔能使計算方法無誤。他身體力行,多年做"義"的工作,"十年矣,法而系之義也,自歲丁未始也"。(《題測量法義》)而《幾何原本》前六卷一卒譯,他就高興地説"至是而後能傳其義也"。由是觀之,當可概見徐光啓已初步認識到數學是現實世界的一門實實在在的、講道理講規律的的學問,一門有系統性、嚴密性和可靠性的學問。於是我們可以大致斷言,他對組成數學理性觀的第(1)、(5)、(6)條已有初步認識。

M・Klein 在《古今數學思想》一書中説,今人對希臘、西方數學所贊賞的有如下幾點:

(a)把數學搞成抽象化的科學。這一項有不可估量的意義和價值(一個抽象的三角形能應於千萬種不同的自然現象,正是數學的力量所在)。

(b)堅持演繹證明。這與人類的習慣違背,因爲憑經驗、歸納、類比和實驗等早已獲得極多的可靠知識,而希臘人則認識到要獲得真理,須從真理出發,經過絶對可靠的演繹推理纔能實現。

(c)空前的細致精神和思想深度。例如限制用圓規直尺作圖,又如《原本》將 467 個命題渾元一氣一體。

(d)宇宙是按數學來設計的。從而充滿對認識自然的信心,他們建立了數學和研究自然真理之間的關係,這在以後便成爲近代科學的基礎本身。

Klein 的論述更足以證明我們上面的斷言是有理由的。

3. 徐光啓的數學理性觀之二

當今，世界似乎已形成了一種看法："數學的最大功能是推動科學發展(包括社會科學)，而科學發展則是社會進步的主要動力"[11]。由於理論思維同實驗觀測是科學發展的兩大要素，而數學在這兩個要素之中又占據極重要的地位，因此這種看法無疑是有道理的。至於數學在科學發展中起着巨大的推動作用的實例以及數學對當今社會的廣泛應用的實例，則不勝枚舉。國內知名數學家齊民友教授最近接連指出："數學……幾乎是任何科學所不可缺少的，沒有一門科學像它那樣澤被天下"。"它是現代科學的語言和工具。""現代科學之所以成爲現代科學，第一個決定性的步驟是使自己數學化。"[12]

在數學對其他科學的作用上，徐光啓是否已有上述近代意識的端倪呢?他在《刻幾何原本序》中講到的唐虞之世"五官"和"周官六藝"時，指出"非度數不爲功"，"不以度數從事，亦不得而工也"，也就是說，如果不動用數學，就會沒有成效，就不會精密；接着又指出師曠墨翟之所以能把音律器械推創到高峰，無非是"精於用法而矣"，無非是用了數學；如果不用數學而"任意揣摩"，就會"如盲人射的，虛發無效"；如果"依疑形似"，就會"如持螢燭象，得首失尾。"在《泰西水法序》中，他說："象數之學，大者爲律法，爲律呂；至其他有形有質之物，有度有數之事，無不耐以爲用，用之無不盡巧極妙者"。在《原本·序》中說："算術者，工人斧斤尋尺，曆呂兩家，旁及萬事，此事不能了徹，諸事未可易論。"更突出的是的他在《致老親家書》中介紹說："況弟所爲曆算之學，漸次推廣，更有千百有用之學出焉"。在《勾股義·序》中他指出："甚度數之用，無所不通者也。"徐氏當然說不出我們今天所說的話，但他的這一大批筆墨，不正是說數學在其他科學中起着指導、決定和保證作用嗎?不正是我們講的"第一個決定性的步驟"嗎? 此外，徐光啓還進一步指出，《幾何原本》所代表的幾何學能"不用爲用"，不正是在告知幾何能不講明應用而實際很有用處嗎?是"度數之宗"；是"萬象之形囿，百家之學海"，是"衆用所基"，能"窮方圓平直之情，盡規矩準繩之用"，這不等於他又進一步宣稱幾何學數學是"任何科學所不可缺少的"，是"語言和工具"嗎?看來他所說的"利先生留意藝學"(《原本·序》)的"藝"，已決非與神鬼相連或無足輕重的舊"藝"，而是理性觀點下的新的"藝"了。

至於他在《幾何原本雜議》中對《原本》作出的第三個著名評論"三至三能"，含義就更豐富了。

"至明"、"至簡"和"至易"這三個"至"，當然是指幾何學已經是一門非常成熟的科學；而"三能"的能"明他物之至晦"、能"簡他物之至繁"和能"易他物之至難"，正是率直說明數學能使其他學問也成爲科學，正是認定數學能"澤被天下"，正是贊頌數學能在普遍的範圍內對"他物""綜其妙"。

所以我們可以相信，徐光啓對組成數學理性觀的第(5)條和第(7)條已有較充分的認識。

4. 徐光啓的數學教育思想——理性觀之三

數學理性觀點的主要成分之一是數學對人類有偉大的教育作用。它能使人的邏輯思維、科學觀點、科學方法、抽象能力和治學態度等各方面得到有效的訓練，能使人的智力得到充分的開發，能使人的思想得到大步的解放，能使人對其他事物的基本屬性得到準確的認識。接受數學教育看來是使人成爲有用之材的必要方法，故有學者認爲：沒有數學的文化、沒有數學教育的教育和不重視數學和數學教育的國家、民族和地區，至少都不會是發展、發達和强盛的[13]。

從徐光啓的言論中，極易看出他對數學的偉大教育作用已有認識。他在《幾何原本雜議》中指出："此書爲益，能令學理者祛其浮氣，練其精心；學事者資其定法，發其巧思。"姑不論這裡的"學理者"是否可以解釋爲從事研究各種客觀規律(理科)的人和"學事者"是否可以解釋爲從事研究生產

技術(工科)的人,但總是在指明幾何學在涵養人的性格、提高人的認識、搞活人的思想和開發人的智力等方面都有很好的教育作用,是在指明數學能教導人們去思索、去幻想、去抒見和去創造。這裡的"去浮氣"、"練精心"、"資定法"、特別是"發巧思",都是見血的文字,可見他對數學的教育作用推許再三。他又在《刻幾何原本序》中說:"顧惟先生之學,略有三種,大者修身事天,小者格物窮理",雖然講的是"先生之學",但無疑幾何學是"先生之學"的主要部分之一,而徐氏又認爲利氏"極精"此"說",所以可以推知,徐光啓已意識到幾何學有"修身"的教育作用,有"事天"(原意包括對天主上帝的尊崇,但也可理解爲掌握客觀規律)的教育作用,有推究事物基本屬性和內在聯係的教育作用。在《雜議》中又再進一步說,即使人的天資聰穎,但"意理疏莽",那還是"無用"的;即使人的天資不高,是個"中材",但是止要"心思縝密",那必定是"有用"有作爲的,而"能通幾何之學,縝密甚矣。"他引述柏拉圖的故事說:"聞西國古有大學,師門生常數百千人,來學者先問能通此書(指《幾何原本》),乃聽入。何故?欲其心思細密而已,其門下所出名士極多(《幾何原本雜議》)。"在此文快結束的時候,他還辯證地堅持:一方面是"五不可學",有"躁、滿、粗、妒、傲"的人,不可學習幾何,一定要先有一個起碼的初級的修養,纔能開始學習;另一方面又強調學習幾何"不止增才,亦德基也"。明白地肯定幾何教育是與才德緊密相連的,肯定數學教育極有助於使人德才兼備。在該文中,我們還可以多處見到這方面的坦率言論,如"幾何之學,深有益於致知":一可以教人自責,認識"自詭爲工巧"的不對;二可以教人虛心,懂得"已知不若……未知之多"而不斷前進;三可以教人辨理,判明原來所持之"理""多虛浮"而不應堅持;四可以教人修正,移易原來欠正確的論述。這些又是入木三分的文字,再次證實徐光啓對於數學的偉大教育作用推崇備至。

既然徐氏已如此充分地認識了數學教育的巨大作用,且他又是一個仁人志士,當然就會極力主張進行有秩序有規模有標準的數學教育。於是他在《雜議》中宣稱"舉世無一人不當學"幾何,而且"此書"一譯完,就馬上"梓傳""亟傳"之,好"公諸人人,令當世亟習焉"。更有進者,他還科學地預見到"百年之後必人人習之"。

此外,我們還可以匯集一些徐氏的言論來支持上面的論斷。在《泰西水法序》中,主張老師須"實心,實學,實行",纔能"誠信於士大夫",這當然包括了數學老師,沒有這三個"實",就當不了數學老師。在《同文算指序》中說"我中夏黃帝命隸首作算……周公用之,列於官學以取士,賓興賢能,而官使之",盛贊數學被納入正規教育的創舉。"孔門弟子身通六藝,謂之升堂入室",這就是說他已認定,要受一定的數學教育,纔算是具備了成爲人材的必要條件。他是主張有學校有老師進行正規數學教育的,主張數學應是"有原原本本師傳曹習之學"(《原本序》)。

在數學教育的目的上,徐氏還有一個灼見:主張授人以方法,教人自制工具。授人以魚,不如授人以漁,漁魚之分,他是毫不含糊的。"金針度去從君用,未把鴛鴦綉與人",說的正是這個意思。

他還主張數學教育必須延續進行,更不能終止,纔能大獲其益。"西士之精於曆,無他繆巧也,千百爲輩,傳習講求者三千年,其青於藍而寒於水者,時時有之,以故言理彌微亦彌著,立法彌詳亦彌簡"(《簡平儀序》)。這種看法確有見地,要使一門科學發達起來,使其理論更加深入又更加明顯,使其方法更加清楚又更加簡要,要一代勝過一代,誠非"延續進行"不行。

至於數學教育方法,他也稍有述及。在《題萬國二圜圖序》中主張示範,教師應能用多種方法講解:"或疑焉,作正、戲、別三論解之"。他又主張數學教學應用輔助方法,特別是利用圖形,"道有理數所不能秘者,非言弗宣;有語言所不能詳者,非圖弗顯。圖之重於天下者久矣"。(《赤道南北兩總星圖系》)這是當然的,數學式子所不能溝通的地方,就用精練的語言去講解,講解還不能明白的時候,就用圖和模型來幫忙,不是同我們今天最一般的教學法相宜嗎?

順便,我們看看徐光啓的數學教育實踐活動:長期以舌耕爲生;尊崇孔子、周官六藝之教,注意

數學書籍，可惜對唐立"十經"已只見《周髀》，對甄鸞、李淳風注《周髀》頗爲贊賞，但對劉徽、沈括等則知之甚少；餘則主要是熟悉明代吴敬的《九章算法比類大全》；中進士前一年，即萬歷癸卯(1603)年，在致上海邑侯劉一焻的《量算河工及測量地勢法》中表明他很善於指授測量數學知識，且提到勾股量深法，重矩勾股量深法，重矩重表勾股量高法、積方法、堆積法、勾股度高度深法、歸除……如此也可窺見他還熟悉程大位的《算法統宗》等書；此外他教學生也是極盡其責的，如對門人孫元化"食之""教之"，使他掌握了西方的筆算和幾何等知識，孫自認此前若看"九章"、"幾何"皆昏昏欲睡，而經徐老師教授，興趣大增，入其堂奥，孫本人不但寫出了《泰西算要》、《幾何體論》、《幾何用法》和《勾股正法》等數學著作，而且成爲抗清志士，可見徐氏教學的成功；萬歷四十年(1619)，他在家書中提到："年官甚閑無事，我請他在寓所暫住，教他算法，已會。今在此相幫，算些曆法也"。可見他任京官時仍能教親友學算；……

與公元前後古希臘文化中哲學和數學成份相比，"數學通過數學教育對中國文化……諸方面的影響是十分有限的。"[13]這在中世紀末期以及文藝復興初期以後，又與西方更拉開了距離，可是徐光啓的上述認識、主張與行動却迥然不同，足證他是我國數學教育方面一個非常難能可貴的人物。

5. 結語

通過上面對徐光啓言論的分析看出，他已擁有一定程度的數學理性觀，是一個有正確數學教育思想的人。他轉化祖宗的舊觀點，移植融會西來觀點並使之中國化，親身不辭寒暑只争春秋帶頭改革開放，令後世景仰。本世紀以來，特别是近四、五十年以來，我國近代、現代數學和數學教育已有長足發展，數學的理性觀也已基本形成並在逐步衍進，追本溯源，界定徐光啓是最早的變曲點，大概可以爲中國數學史所接受吧！也可爲廣大學者所接受吧！數學家 M・柯朗等多次强調要對數學有正確的理解和要加强數學的教育作用，1941 年他們指出："數學的教學，逐漸流於無意義的單純演算習題的訓練，固然，這可以發展形式演算的能力，但却無助於對數學的真正理解，無助於提高獨立思考的能力。"[14]接着又在 47 年秋加警指出："……如果不試圖從數學的形式主義和單純演算中越出來，以掌握數學的實質，那末挫折和迷惑的危機將顯得更爲嚴重。"[14]數學家 M・克萊茵也一貫强調對數學要有正確的認識，特别是在 1972 年初夏指出："本書極度關心的還有：對數學本身的看法，不同時期中這種看法的改變以及數學家們對他們自己的成就的理解。"[15]可見探索徐光啓的數學理性觀雖是對古人的評價問題，但却也有極爲積極的現實意義。

參考文獻

1 武　仁、徐光啓·中西科學的第一個交點·徐光啓研究論文集，1986，上海：學林出版社，33
2 李約瑟. 中國科學技術史. 北京：科學出版社，第三卷，337
3 丁石孫等. 數學與教育. 長沙：湖南教育出版社，1989，33
4 夏　恒.《九章算術》與中國古代數學教育，北京師範大學學報(自然科學版)，增刊 3，1991
5 張楚廷. 數學與創造. 長沙：湖南教育出版社，1989，18～19
6 R・柯朗，H・羅賓斯. 數學是甚麽. 長沙：湖南教育出版社，1985，1
7 徐利治. 數學方法選講. 武漢：華中工學院出版社，1983，1～14
8 參見 3，103～106；參見 4，175～178
9 同 2，333

10 齐民友. 數學與文化. 長沙:湖南教育出版社,1989,17
11 胡作玄. 數學與社會. 長沙:湖南教育出版社,1989,45
12 同 10, 3～4
13 同 10,12～13
14 同 6,第一版序言,第二、第三及第四版序言
15 M·克莱茵. 古今數學思想. 上海科技出版社,1979,第Ⅳ頁

本文還參考了以下論著:王重民輯校. 徐光啓集(上、下),上海古籍出版社,1984;上海市文物保管委員會. 徐光啓著譯集(上、下函),上海古籍出版社,1983;吴文俊主編. 九章算術與劉徽,北京師範大學出版社,1982;吴文俊. 數學. 中國大百科全書·數學卷,序;蘇步青. 幾何學. 中國大百科全書·數學卷,條目;梁宗巨. 幾何原本(Elements). 中國大百科全書·數學卷,條目;李迪.《九章算術》與《幾何原本》. 載吴文俊主編九章算術與劉徽,北京師範大學出版社,1982。

從《學算筆談》論華蘅芳的數學教育思想

王桂芹　　　　李敏
（長春師範學院）　（長春職工大學）

華蘅芳(1833—1902)是我國清末數學家、翻譯家和教育家。字若汀，江蘇常州金匱縣(現無錫市)人。華蘅芳在數學教育方面的著作有《學算筆談》12 卷、《算草叢存》中的《平面三角測量法》、《算齋鎖語》和《算法須知》4 章以及《西算初階》1 卷。特別是《學算筆談》內容十分豐富，在中算史上開創以專著進行數學評論的先河。同時闡述了他的數學教育思想和哲學觀點。是中國數學教育史上一部重要文獻。

一、華蘅芳在《學算筆談》中的數學教育主張

《學算筆談》共 12 卷，是華蘅芳關於數學理論、數學思想和數學教育等方面的評論性著作。是培養創新人才的教科書。本書內容十分豐富。卷一至卷四論算術，卷六卷七論天元術，卷八卷九論代數，卷十卷十一論微積分，卷五卷十二爲雜論，其序及卷一“總論算法之理”和兩卷雜論集中反映了他對數學的認識和看法及數學教育主張。

對於數學的重要性他有精辟的論述，他說：“有是端而知所以擴充之，則統乎萬事萬物之綱，故凡天文之高遠，地域之廣輪，居家而帛粟菽，在官而兵河鹽漕，以至儒者讀書考證經史，商賈持籌權衡子母，莫不待治於算，此又算之切於日用，斯須不可離者也。”[1]這裡道出了一百多年以前華蘅芳對數學重要性的認識。自古以來數學是重要的學科，當代科學家錢學森提出的“數學科學是當代技術的一個大門。”[2]

華蘅芳主張厚今薄古推崇創新精神，他說：“算學之事，則宜去故生新。”善學算者“不存先人之見，亦不存中西之見。”否則這些偏見“膠固積滯於胸中，足以蒙蔽心思，而新義不得復入矣。”[3]“他事皆有止境，而學算無止境也，古人創術之時，何嘗不自以爲巧密，逮有巧密於古術者，則以古術爲疏拙矣，後之視今，亦猶今之視昔，安知此後更無再巧再密之術而視今之巧密者爲疏拙耶。”[4]他的論述對當時封建時代信而好古，厚古薄今的思想和學術傳統作了有力的批判。培養人的創造精神是當代和未來教育的根本任務。

華蘅芳主張教科書要淺顯易懂，他在《學算筆談》序中對那種“好爲隱互雜糅，窮極微奥，不屑以淺近示人，甚或秘匿其根源以炫異，變易其名目以托古”[5]的陋習深惡痛絕。他反對用晦澀語言寫數學著作，故弄玄虛，把數學知識神秘化，妨礙數學知識的傳播和普及。他對數學教科書要求是“演爲算式以習其數，設爲問答以窮其趣。法由淺而入深，語雖繁而易曉”[6]。《學算筆談》平淺易解，這是華蘅芳著作的一大特色。

華蘅芳主張研究數學史。他身體力行，在中算史上開創以專著進行數學評論先河，除在《學算筆談》中對先前的數學家和數學著作一一作出評價之外，還在《學算筆談》十二卷中撰寫專文“論《疇人傳》必須再續”。指出自阮元撰《疇人傳》和羅士琳續以來“迄今又數十年，算學日新月盛，人材輩出，其中最著名者如戴煦、項名達、徐有壬、李善蘭諸家，其所明者有天元、代數、微分、積分諸術，皆能超軼古法，於算學中大開門徑，非徒株守成法而已。若不亟爲之傳，未免爲算學中一件大缺陷之事”[7]。他曾請數學大師李善蘭完成此事，李善蘭委托給張文虎，張文虎也没作，當時最年長的數學家吳嘉

善也未肯動筆，於是他只好將其弟華世芳的《近代疇人著述記》附錄於後，"以待所傳者之採擇焉。"不久，遂有諸可寶撰《疇人傳三編》七卷，黃鐘駿撰《疇人傳四編》十一卷。在華蘅芳研究數學史的主張下，十九世紀末我國數學史的工作豐富多彩，著述再四。華蘅芳的這些主張在當時無疑是先進的，對今天的數學教育也具有指導作用。這正如大數學家龐加萊(Henri Poincare，1854—1912)曾指出："如果我們思想要預見數學的將來，適當的途徑是研究這門科學的歷史和現狀"。對我們中國人來說，特別是要研究這門科學在中國的歷史和現狀。

二、《學算筆談》所提倡的學習方法

華蘅芳注重數學教學，提倡循序漸進，"由淺而入深，誘掖而引進之"[9]。淳淳告誡"必循序而及，不可躐等而進"[10]。《學算筆談》內容由易到難按識數、記數、加減乘除、開方、天元、代數、微分、積分編排貫徹了循序漸進的教學原則。

他主張因材施教，學以致用，他認爲"學算者之志向若只求見用於當世，爲衣食名利之計，則祗須熟習整數、分數、小數之三種，加減乘除開方，再從各書中摘錄測量推步各種成法，藏之篋中，便已無所不能算矣"[11]。對於數學難題教學則認爲"學者若能於古今之算書中求其窒礙難通之處而思設法以破之，則從此可創古人所未有之術，前以繼往，後以開來，爲算學中力辟新境，此余所自問未能而日望之後學者也。"[12]

在教學上他强調少而精，反對繁鎖哲學。他說："學算不必多書也，惟擇其要者觀之而已。"又說："九容之術。原書已不勝其繁，又從而抽繹其義，引伸其說，名目愈多，頭緒百出，試思此各算學究境有何用處？"[13]

在學習方法上他提倡熟讀精思，如在"論看題之法"、"論馭題之法"等等中提出"題中之各句，句中之各字"，不能字字盡見，要分清"有極其着力者"，"有不甚着力者"，"可有可無者"，後者往往"顯露於面前，一望即見，而極其着力之字，則藏伏隱匿於各字之間，而使人不易見"，須認真鑒別。

對學生作數學習題，他强調靈活運用知識，主張嚴格要求，他認爲解題時，"惟題之形狀，萬變不窮。則馭題之法，亦當隨機應變，不能執一以論也。"[14]"兼綜合法"以解之。作題時規定要求，遵循的步驟是："一必詳載題目，二必解明算理，三必全寫算式，與其簡也寧繁，四必用格式影寫，與其草書寧可作正書。"[15]"一切算稿均宜筆之於書"。[16]這種嚴謹的治學思想對近代數學教育工作產生了深刻的影響。

三、《學算筆談》中華蘅芳的哲學思想

在識數之法中華蘅芳說："物生而後有象，象而後有滋，滋而後有數，則物之有數乃人之强立名目以記物之多寡者也。"[17]在《學算筆談》序中說："他若衣服之工，補短截長，奇衺合度，則有面積之意焉，烹飪之工，味咸而和以水，未淡而劑以鹽，則有比例之意焉。"又說："事物日變，人心智慮日出，……算學之境因是而益深。"[18]這具體說明數學的產生來自客觀存在，是人們在生產實踐中總結規律得來的，道出了物質是第一性的，意識是第二性的認識。這種唯物主義精神給數學起源於河圖洛書，數學乃由黃帝臣隸首所創造的唯心主義論點以有力的批判。

華蘅芳在觀書之法中認爲"數理淵深，不可限量，其中妙意，任人探索，終無窮盡之時，不可謂此理之外更無他理，此法之外更無他法也。"[19]又說："他事皆有止境，而算學無止境也。"[20]這種用運動發展的觀點來認識數學理論和計算方法是唯物的觀點。他又說："一切算法其初皆從算理而出，惟

既得其法，則其理即寓於法之中，可以從法以得理，亦可捨理以用法，苟其法不誤，則其理亦必不誤也。"[21]華蘅芳說明了理論來源於實踐、指導實踐。在實踐中發展理論；論述了數學理論與方法的辯證關係。在那個年代有這種樸素的辯證思想是難能可貴的，華蘅芳的這些思想觀點是來源於他幼年自制三棱鏡，驗證彈導曲綫科學實驗；來源於制造輪船、硝酸等復雜的技術工藝工作的實踐；來源於大量翻譯西方近代科學技術書籍，西方達爾文等人的科學思想的影響，但由於華蘅芳所處的時代受到儒家哲學思想的影響，他的哲學觀點所受到的影響是多方面的，最後沒有形成完整的思想體系。

參考文獻

1.5.6.9.15.18.[清]華蘅芳.《學算筆談》序(1882)，行素軒算稿

2. 錢學森.發展我國的數學科學——在中國數學會數學教育與科學研究座談會上的講話.
數學進展，19卷2期(1990)

3.4.10.11.13.15.19.20.[清]華蘅芳.《學算筆談》卷五，(1882)，行素軒算稿

7.12.14.[清]華蘅芳.《學算筆談》卷十二(1893)，行素軒算稿

17.21.[清]華蘅芳.學算筆談卷一(1882)，行素軒算稿

22. 羅見今.清末數學家華蘅芳.中國數學史論文集(一)，濟南：山東教育出版社，1985

23. 李迪.中國數學史簡編.瀋陽：遼寧人民出版社，1984：358—364

蘭州大學數學系發展簡史[1]

陸潤林
（蘭州大學，蘭州，730000）

蘭州大學的前身是1909年創建的甘肅法政學堂，1944年國民政府教育部定名爲國立甘肅學院，1946年在國立甘肅學院的基礎上擴建成國立蘭州大學，這時該校的理學院設有數學系，是蘭州大學設有數學系之始，迄今已有46年的歷史。這46年中，新中國建立前只經歷了3年，所以這個系主要是新中國建立後的43年中，在上級領導和兄弟院校的關懷和支持下，經過學校歷屆領導的具體領導和全系教職工的積極拼搏，逐步成長和發展起來的。

1949年新中國建立後，蘭州大學開始由西北教育部管理，1953年大區撤銷後歸中央教育部直接管理，1954年起列爲高等教育部直屬重點綜合大學之一，現在仍爲國家教育委員會直屬重點綜合大學之一。

數學系的基礎數學專業經國務院學位委員會第一批批準有博士授予權，現有博士導師3人，博士副導師2人，同時批準基礎數學、計算數學、應用數學三個專業方向有碩士授予權。全系現有教師82人，除20人在國外攻讀學位和工作，在校工作62人中有教授8人、副教授21人、講師25人、助教5人、未定職3人。這62人中獲得博士學位10人，獲得碩士學位22人；有13人被列入《世界數學家人名地址録》（1990年第9版）中。

到1991年這個系已爲國家培養2400多名本科畢業生（不包括專科和夜大畢業生），80名碩士和18名博士。成爲我國特別是西北地區各層次數學人才培養的重要基地。現將這個系教學與科學研究的發展，劃分爲初創時期、奠基時期、提高質量時期、培養高層次人才時期等四個時期，簡述如下。

一、初創時期（1946.8—1949.8）

國立蘭州大學是國民政府設在西北的唯一的一所國立大學，數學系學制爲四年，是從蘭州、西安、武漢、南京等地招收學生，當時這個系共有學生16人（一年级5人，二年级6人，三年级5人），無畢業生。

系主任爲程宇啓（法國留學並獲博士學位），教師有段子美（法國巴黎大學留學）、閻人乾（清華理學碩士）、李修睦、劉新年、邢漪珍、白尚恕、錢毅南、王長仕、馬元鵬等，另有兼任教授樊懷義、鄭均年等。

各年级開設必修課與選修課的名稱：

一年级：三民主義（必2）、國文（必6）、中國通史（必6）、微積分學（必8）、普通物理（必9）、地學通論（選6）、普通地質學（選3）、方程式論（必3）、體育（必2）。

二年级：高等分析（必8）、微分方程（必3）、高等解析幾何（必8）、普通化學（必5）、社會學（必6）、日文（選6）、法文（選6）、倫理學（必4）。

三年级：第二外國語（日文）（必6）、射影幾何（必3）、近世代數（必6）、理論力學（必8）、數論（必4）、向量分析（選3）。

教材由任課教師自行決定，多數教材系英美大學通用教材，少數課程由教師自編教材。這就是

數學系初創時期的教學概況。

二、奠基時期(1949.8—1957.7)

建國後這個系學制仍爲四年,1956年起改爲五年制。系主任先爲段子美(1949.9—1954.12),後爲陸潤林(1955.2—1956.7),周慕溪(1956.8—1957.7)。這個時期數學系的教學和改革工作,在學校統一布署下主要進行了以下三項奠定基礎和創造條件的工作。

第一、切實奠定師生思想基礎

針對解放初期認識混亂和形勢需要,根據上級指示精神,學校統一組織全校師生員工,在參加政治學習、抗美援朝時事學習、土地改革、三反運動等活動的基礎上,1952年3月在西北區高校教職員學習委員會來蘭領導小組統一組織下,全系教職員投入了一次轟轟烈烈地學習運動,經過兩個多月的學習和討論,嚴肅地批判了封建、買辦、法西斯的反動思想;初步劃清了與資產階級腐朽思想的界限;開始樹立了只有依靠黨組織纔能搞好工作,只有虛心向群衆學習纔能發揮更大作用的思想;同時還初步學會了正確掌握批評與自我批評的武器。從而奠定了全系教職工開展教育改革與進行科學研究工作的思想基礎。

第二、認真建立專業教育和教研組

1950年根據第一次全國高等教育會議精神,數學系在學校布署下開展了課程改革工作;1952年高等教育部吸取蘇聯教育經驗基礎上,下達綜合大學數學專業教學計劃,組織全系教師認真學習部頒計劃後,制訂了蘭州大學數學專業的教學計劃,它對全學程的課程設置,各課程的學時分配及考試考查的方法,課堂講授、自習、習題、討論、實驗、實習等環節的安排,均作了明確的規定。從而使我系培養人才的工作,開始步入有目的、有計劃、有步驟地培養的專業教育時期,這是我系發展史上具有歷史意義的制度上的重大改革。

1953年高等教育部爲了交流和總結實施教學計劃以來的經驗,舉辦暑期教學研究座談會,會後數學專業由北大段學復和南開吳大任執筆提出"關於修訂數學專業教學計劃的說明"下達各校。"說明"中提出的培養目標是:培養具有一定的馬列主義水平,全心全意爲人民服務的,體格健全的,切實掌握數學專業基礎知識並具有一定數學專門知識的人才。據此,我系又重新修訂了教學計劃。由於我們學習蘇聯經驗結合我國學生實際不够,1954年造成學習負擔過重的現象,於是1955年高教部在工業院校、綜合大學校院長座談會上提出:要貫徹全面發展的教育方針和"學少一點,學好一點"的原則,根據這次精神,我系再次修訂了教學計劃,其中開設課程爲:

基礎課:數學分析、解析幾何、高等代數、普通物理、微分方程、理論力學

專業課:復變函數、實變函數、幾何基礎、數理方程、微分幾何、變分法

專題討論:廣義函數、微分幾何、泛函分析

建立專業教育制度的同時,還成立教學研究指導組(簡稱教研組),它的任務是:研究、制訂並實施所承擔課程的教學大綱;審查各課程的教材和教法,檢查教師教學工作;領導本組的學術討論,檢查教師的科研工作;領導與組織學生的自習、實驗、實習和參觀等。因此,教研組是系裡教學和科研的基層組織,是發揮集體智慧改革教育的堅實基礎,是提高教育質量和開展科學研究的根本保證,是把專業教育制度落到實處的强有力的組織措施。我系1951年最早成立了初等微積分教研組(組長王培桐),後經幾次調整,到1953年全系教師分別參加數學分析(主任段子美),幾何(主任趙繼游),代數及函數論(主任劉古傑)三個教研組進行活動,各教研組均定期開會,制定每學期工作計劃,討論教學大綱和教材,進行教學檢查,組織科學討論會,開展青年教師試講活動,改進畢業論文

指導工作，通過教研組工作總結等。這個時期我系廣泛採用了蘇聯教材的中譯本，如辛欽著《數學分析簡明教程》，庫羅什著《高等代數教程》等。

總之，專業教育制度的實施和教研組的建立，奠定了我系後來教學和科研的發展基礎。

第三、大力充實和培養師資力量

剛解放時數學系教師只有段子美、劉訴年、王長仕、馬元鵬等 4 人，因此，採取有效措施充實師資力量，認真培養新生力量，就成爲數學系發展的當務之急。除從甘肅農專併來張典、王培桐外，首先，從國內調來 9 人，他們是陸潤林（49 年從東北調來）、陳慶益（莫斯科大學副博士，57 年從高教部爭取來）、趙繼游、劉古傑、周慕溪、鄺福綿、陳湘綾、謝瀾安、高冠群；其次，從東北人大、北大、南開等校爭取到畢業生 14 人，他們是陳文嫄（點名從高教部爭取的）、蔣桂中、王德人、濮德潛（經江隆基派人和段學復主任面談確定的）、鐘正華、林國寧、黄培柱、林燦、凌星前（女）、任國鈞、黄克孫、杜國光（女）、柳訓明（女）、劉漢章；再次，本校畢業生留校有周尚仁、郭秉榮、劉宗文、劉義循、李志深、張建國、王自楷、高炳蘭、黄紹忠等 17 人。這樣，到 1957 年全系教師人數達到 42 人，當剛解放時 4 人的 10 倍，其中青年教師 31 人爲我系後來發展創造了前題條件。

青年教師們培養主要措施有三：一是給他們壓教學、輔導、編寫講義、試講等任務，使業務進修與當前教學工作緊密結合，讓他們在教學實踐中逐步成長；二是確定科研方向，把方向相同或相近的教師組織起來，定期舉行學術討論，輪流發言，交流成果與訊息，長期堅持這種討論班的制度，有力地促進我系學科發展；三是積極組織教師參加國內有關學術討論會、教材編寫會、經驗交流會，可以了解訊息，吸取兄弟院校經驗，促進我系發展。

這個時期教學質量有了提高，表現在課堂講授重點突出，教學環節配合緊密，畢業論文較普遍進行，青年教師在教學上作用顯露出來。同時，科研上也取得進展，如 1956 年全校第一次科學討論會上趙繼游、周慕溪、劉古傑、陳文嫄、濮德潛、謝瀾安、鄺福綿、陳湘綾等 8 人在分會場做了報告；制訂 12 年科研規劃時提出的主要研究方向是：點集幾何、纖維性芬斯拉空間（周慕溪），近似計算泛函方程、非綫性分析（陳文嫄、陸潤林等），偏微分方程研究、解析函數的邊界性質（陳慶益、濮德潛等），復變函數中保角變換的研究（趙繼游）。

此外，1956 年數學系資料室成立，有外文雜志約 70 種，其中成套外文雜志 10 種，爲我系教學和科研創造了有利條件。

這段時期内，我系共有本科畢業生 92 人（其中 50 年 5 人，51 年 5 人，52 年 5 人，53 年 4 人，54 年 55 年無畢業生，56 年 36 人，57 年 37 人），另有專科畢業生 101 人，共計大、專畢業生 193 人。

三、提高質量時期（1958、12—1966、2）

1958 年的教育大革命造成我系教學秩序混亂，教學質量下降，科學研究浮誇，生産勞動頻繁。1959 年初黨委第一書記兼校長江隆基到校，立即採取全面安排各項活動時間，建立多種規章制度，加强教學組織管理，實行黨委領導下的校務委員會負責制等措施，從而較快穩定了全校教學秩序，調動了廣大教職工積極性，造成我系不斷提高教學質量的新時期。

這個時期系主任一直是趙繼游，總支書記是張嘉賓，系教學秘書濮德潛。新增加教師有程昌鈞（58 年北大分來）、葉開沅（59 年北大調來）、湯任基（清華研究生班）、王凱、賀德化、唐珍（留蘇，從西北師院來）、林家壽（61 年從蘭州科技大併來）、郭聿琦（64 年復旦分來）等；本校畢業生陸續留校有劉粲、朱正佑、王明亮、牛培屏、陳洪陶、羅學波、余慶餘、陳永義、趙雙鎖、禚宏順、楊鳳翔、段炎伏、王燕濤、梁思正、徐軍民、牛亞軒等 32 人。到 1966 年除調離 4 人外，全系共有教師 70 人，分布在數學

分析(9 人)、微分方程(10 人)、概率運籌(13 人)、計算數學(6 人)、力學(18 人)、高等數學(14 人)等 6 個教研組。

1960 年增設力學專業，1962 年又增設計算數學專業並將系名改爲數學力學系(簡稱數力系)。1962 年建立力學實驗室；1958 年購手摇和電動計算機 10 臺；1984 年又購 ABM—PC/XT 和 PC/XT286 微型計算機 22 臺，並先後開出多種操作系統、計算機原理、匯編語言等課程。

在以著名教育家江隆基爲核心的學校領導班子强有力地組織領導下，我系積極貫徹《高教 60 條》和《自然科學研究工作暫行簡則(草案)》的精神，主要圍繞下列兩個方面開展工作。

第一、採取有效措施提高教學質量

1959 年根據學校布署，發動全系教師再一次修訂教學計劃和數學大綱，結果是：全年 52 周的安排是數學、科研和平時勞動共 35 周(平時勞動每周 4 小時)；考試考查 4 周、集中勞動 6 周；鑒定 1 周；假期 7 周(寒 3 周，暑 4 周)。五年教學總時數一般爲 3270—3800 小時。

在校長經常深入課堂聽課、通過各種類型會議聽取群衆意見、找學生談話了解學習情況的推動下，各教研組積極開展工作，充實和革新課程的教材内容，密切聯系我國實際，改進教學環節和教學方法，貫徹循序漸進和因材施教的原則，提倡教學相長，積極培養學生獨立工作能力。

這樣一來，1960 年全校開展教學檢查活動，我系學生學習成績取得了明顯的提高，見下表[2]：

數力系第二學期與第一學期學習成績比較表

百分比 成績等級 / 學年學期	優等	良好	及格	不及格
1958—1959 學年第二學期	27.15	36.33	28.87	7.71
1959—1960 學年第一學期	33.86	37.59	23.24	5.3
升降率(後一學期與前一學期相比)	+6.71	+1.26	+5.57	−2.41

數力系數學專業三年級學生歷年成績比較表

百分比 成績等級 / 學年學期	各類成績比例(%)				説明
	優等	良好	及格	不及格	
第一學年第一學期	13.6	36.9	38.8	10.7	
第一學年第二學期	15.9	25	52.3	6.8	
第二學年第一學期	—	—	92.9	7.01	全部考查
第二學年第二學期	32.5	30.2	30.2	7.1	
第三學年第一學期	36.2	43.1	14.7	6	
本學年和第一學年第一學期的比較	+22.6	+6.2	−28.1	−4.7	

1961 年貫徹《高教 60 條》時，我系重新修訂教學計劃，這次修訂的教學計劃的時間安排變爲：五年內除假期 45 周外，共有 215 周，其中教學 175 周(上課 156 周，考試 19 周)，約佔 81.5%；生産勞動 25 周，約佔 11.5%；科研 10 周，約佔 4.5%；機動時間 5 周，約佔 2.5%。五年上課總時數爲 2800—3000 學時。課程設置時間分配：共同政治理論課(3 門)佔上課總時數的 12%左右，專業課(12 門)佔 75%左右，另有廣函與偏微、泛函分析、非綫型算子、綫性代數、計算等專門組課和 10 周畢業論文。計算數學與力學專業教學計劃從略。

第二、討論班形成的科研集體

由陳文嫄等 50 年代自發組織的討論班，到 60 年代發展成爲我系有組織、有計劃、持之以恒的討論班制度，它有力地推動着我系科學研究的不斷發展，到 1966 年教師中進行科學研究者達半數以上，並取得顯著成績。如 1963 年全校科研討論會上，我系有 19 篇報告，計陳文嫄 3 篇，陳慶益、周慕溪、唐珍各 2 篇，葉開沅、濮德潛、王德人、湯任基、余慶餘、羅學波、朱正佑、牛培屏、張建國、趙雙鎖各 1 篇。又如我系列入全校 1963 年科研計劃中的 9 個中心課題是：一般綫性算子理論(陳慶益)、非綫性泛函分析(陳文嫄、陸潤林)、復變函數幾何應用(趙繼游)、定性理論(周慕溪)、計算方法(唐珍、王德人)、四元數物理應用(濮德潛)、規劃論(劉耀)、排隊論(鄺福綿、陳永義)、板殼理論(葉開沅)。

這個時期最爲可貴的科研成果是初步形成了有穩定科研方向、有學術帶頭人和骨干力量、取得一批研究成果的幾個科研集體。

非綫性泛函分析：學術帶頭人是陳文嫄，骨干力量有余慶餘、朱正佑、周永良、陳洪陶等，從 1957 年起在數學進展、數學學報、蘭大學報、東北人大學報等刊物上發表論文 23 篇。

偏微分方程：學術帶頭人是陳慶益，骨干力量有羅學波、李志深、牛培屏、王明亮、張建國等，從 1957 年起在數學學報、數學進展、蘭大學報、數學物理學報等上發表論文 16 篇，與北大合編《數學物理方程》教材 1 種。

計算數學：學術帶頭人是唐珍、王德人，骨干力量有蔣柱中、熊藻、鄧長壽、趙雙鎖等，發表論文 6 篇，編寫教材和專著 3 種。

固體力學：學術帶頭人是葉開沅，骨干力量有湯任基、程昌鈞、鐘正華、郭秉榮、苗天德、林聖芬等，從 1953 年起發表論文 8 篇，合編專著 5 種。

此外，在概率統計、規劃論等方面教師也有研究成果引人矚目。

1965 年經教育部批準，我系成立數學研究室，主任陳慶益，副主任陳文嫄。

總之，這個時期我系共培養五年制本科畢業生 397 人(其中 58 年 34 人，59 年 52 人，60 年因改爲五年制無畢業生，61 年 60 人，62 年 35 人，63 年 47 人，64 年 65 人，65 年 104 人)。這個時期畢業生人數爲上一個時期畢業生總數 92 人的四倍多。

四、培養高層次人才時期(1977.9—1991.12)

1966 年到 1970 年我系停止招生，1971 年底招收三年制工農兵大學生，1977 年起恢復招生，學制改爲四年。1979 年黨委書記兼校長劉冰到校，採取平反冤假錯案、落實政策、恢復教學秩序、改進思想政治工作，從而較快消除十年動亂的影響，使我系工作轉入提高質量和發展科學的中心任務上來。

這個時期系主任先是趙繼游(1972.10—1976.7)，其次是王璞、唐珍代理(1976.8—1978.7)，接着又是趙繼游(1978.8—1980.12)，然後是陳文嫄(1981.1—1990.8)和牛培屏(1990.秋—1991.

秋)。現任系主任是郭聿琦,總支書記是張映槐(1986年起),他以前的歷任總支書記是侍庶懷、馮敏、周芹香、劉耀。1985年我系又增設應用數學專業,1986年力學專業獨立建系,於是系名又恢復成數學系。1980年陳洪陶、李永理、徐德啓等骨干教師與物理系有關教師合建計算機方面的系。這樣,到1991年底全系共有教師82人,除在國外20人外,在校62人分布在泛函分析(6人),微分方程(8人),代數(7人),統計運籌(5人),系統與控制(8人),計算方法(11人),高等數學(11人),軟件(6人)等8個教研室。1987年經學校批準成立蘭州大學數學研究所,所長陳文嵊,副所長朱正佑。

1982年我校引進日本富士通公司M—340S系統的中型計算機,建立面向全校的計算中心。到1991年底我系和力學系共有外文期刊364種,中文期刊110種,圖書7500多册。

我系這個時期主要致力於提高質量的工作。

第一、積極提高主干基礎課的教學質量

根據我國經濟建設、科學進步和社會發展的需要,結合對畢業生跟踪調查、教學檢查和教學評估中發現的問題,經反復討論,把專業的培養目標調整爲:主要培養德智體美全面發展,能分別從事教學、科研、技術等方面的實際工作和基礎理論研究、應用研究、新技術開發研究等工作的數學人才[9]。堅持打好基礎、培養能力、因材施教、搞活教學的原則,精心設計符合上述培養目標和教育規律的新的課程體系和知識結構。1986年制訂並實施學分制的教學計劃。該計劃要求四年內修滿160學分(内必修課84學分,選修課、畢業論文、教學實習等共76學分)。課程設置及學分如下:

公共必修課共28學分,計政治理論(12),外語(16),思想政治教育(不計學分),體育(不計學分);

專業必修課共56學分,計解析幾何(4),數學分析(19),高等代數(9),物理(4)、常微分方程(4)、微分幾何(4),復變函數(I)(4)、力學(4)、數學模型(4);

限制性選修課至少應修42學分,分爲兩組:第一組在實變函數(4)、概率論(4)、抽象代數(I)(4)、數理方程(4)等11門中至少選7門;第二組在復變函數(II)、抽象代數(Ⅱ)、群論等11門中至少選3門;

非限制性選修課有非綫性分析、綫性與非綫性偏微分方程、非綫性常微分方程、半群代數理論等24門;

還規定學生至少參加一個討論班,選修人文科學至少2學分等。

計算數學與應用數學的學分制計劃從略。

與此同時,除更新教材内容,改革教學方法與考試方法外,還大力進行課程建設,特別是主干基礎課的建設。主干基礎課是把基礎課中具有分量重、難度大、涉及面廣和影響深遠等特點的課程作爲主干基礎課;採取的加强措施是由學術水平高、教學經驗豐富、教學效果好的副教授以上教師擔任主講,並配備責任心强的教師擔任習題、輔導、批改作業、實驗實習等環節;並堅持任主干基礎課教師由系主任直接聘任報學校審批的制度。

數學分析和高等代數兩門最重要的主干基礎課的加强措施[4]。首先,狠抓了課堂講授,在教材處理上,要揚教材之所長,而補其所短;在講授上,要遵循少講精講的原則,着重講思想講方法,將一個個"提出問題、分析問題、解決問題"的生動過程展現在同學面前;緊緊把握知識的積累以形成能力的目的,而能力的提高又促進知識的積累與開拓的辯證關係。其次,加大了課堂討論的比例,比如高等代數第一學期講授與討論的比例爲7∶3,而後一學期則爲6∶4;每次討論都有明確的主題,進行充分的準備,從而能自如地處理討論中隨時出現的問題,掌握討論的主導方向,使同學獲得最大的效益。再次,充分發揮習題的作用,要求助教對作業全批全改(包括用詞、造句、標點符號等),做得差的退回重做,有時還對個別同學的作業採用面對面地批改或當衆批改,使錯者知其原因,聽者引

以爲戒;開學初宣布作業完成情況佔學期成績的10—15%,促進做作業積極性;還要求學生多思、多問,提出"没有問題就是没有學懂"的口號;教師應變等學生問爲找學生問。國家教委負責數學教學的同志在巡回聽課中也認爲這兩門課的教學質量是高的。從近年研究生的考試中看:1983年考試中本校考生數學分析和高等代數的及格分率别爲42.9%和57%;1985年及格率分别爲78.9%和89.5%;1989年分别爲87.5%和100%。由此可見,經過10年的努力,這兩門主干基礎課向教與學的第一流邁出堅實的一步,更爲重要的是它推動着本科生培養質量的全面提高。

第二、精心培養高層次人才

改革開放以來,國外陳省身、楊忠道、尼倫貝格、温世良等10多位專家和國内萬哲先、齊民友、徐利治、曹錫華等30多位教授到我系作學術報告;50多位出國進修或攻讀學位的教師已有20多位返校任教;加上國内外學術會議的交流,促進我系科學研究的發展,原來科研集體更趨成熟,新的科研集體也顯露頭角。

陳文嫄、余慶餘領導的非綫性分析已在國内外發表論文100多篇,出版專著5本,新增範先令、鐘承奎、耿堤、張志强等骨干力量。

陳慶益、羅學波領導的偏微分方程已在國内外發表論文90多篇,出版教材和專著5本,新增鹿立江、安幼山、傅初黎、崔尚斌、馮尚學等骨干力量。

郭聿琦領導的半群與組合半群在正則半群與兩類廣義正則半群的結構理論、同餘理論、語言與代數碼的分解與結構理論上開展工作,並在國内外發表論文80多篇,有江中豪,歐陽克智、羅彦鋒、李寶、周林芳等骨干力量。

朱正佑領導的計算方法已發表論文50多篇,出版教材和專著7本,新增丁方允、陳綏陽、劉義循、伍渝江、張廣運、叢玉豪、牛明飛等骨干力量。

陳永義領導的統計運籌方向在應用概率、馬爾科夫鏈等方面進行研究,發表論文38篇、出版著作3本,現有李澤慧、王嘉瀾、彭英偉、焦桂梅等骨干力量。

程建綱領導的系統與控制方向在非綫性常微分方程及應用,人工智能與自適應控制、信息與决策科學中的數學問題、廣義Radon變换與地震CT技術等方面開展研究,並在國内外發表論文50多篇,現有秦成林、牛培屏、權宏順、李志斌、王海明、賀也平、魏婷等骨干力量。

基於我系科研的廣泛開展,經國務院學位委員會批準,我系基礎數學有博士授予權,博士導師爲陳文嫄、陳慶益、郭聿琦、博士副導師爲羅學波、余慶餘;同時批準基礎數學、計算數學、應用數學三個專業方向有碩士授予權。

實行學位制以來,我系採取有效措施,精心培養高層次人才[5]。首先,跟踪學科發展趨向,更新教學内容。如泛函方向强調立足於同其他學科的交叉,上與拓撲學、幾何學等經典數學相聯係,下與非綫性偏微分方程、物理學等應用學科相滲透,豐富並更新其内容。其次,强調論文選題的多樣性、前沿性和開拓性。如半群强調前沿性課題與開創性課題并行的作法,一方面瞄準該學科主流領域和活躍課題,另一方面在查閲資料和國外交流中,掌握信息,開創新課題,從而使我們的研究與國際發展同步前進。再次,加强横向聯係和學科間滲透。培養過程中,强調國内外、校内外、系内外和導師間、師生間、學生間不同層次的合作與交流,發揮群體培養功能。最後,培養方式上要講授、討論班、個别指導相結合。對基礎課和重要專業課,主要由指導教師精心進行課堂講授,使學生掌握新理論和新方法;採用討論班的形式,以培養能力和打科研的基本功;針對學生智力、韌性、學習態度和方法的差異,導師個别指導,因勢利導,更是不可少的重要方式。此外,還要求研究生進行教學實習,承擔本科生各教學環節的工作;要求導師以身作則,以樹立嚴謹治學和對工作高度責任感。

這個階段,我系共培養1980名四年制本科畢業生。從1978年起到1991年我系連續招收14届

碩士研究生 155 人，共畢業 80 人(包括研究生班)；1984 年開始招收博士研究生，經精心培養，到 1991 年共畢業博士研究生 18 名。

總之，各層次畢業生，多數已成爲所在單位的教學、科研、科技開發的骨干力量，爲我國特别是西北地區數學教育和數學學科的發展作出顯著貢獻。

參考文獻

1、蘭州大學數學系歷年教學和科研檔案，蘭州大學檔案館
2. 陸潤林．蘭州大學校史．蘭州，蘭州大學出版社，1990，271—273
3. 蘭州大學教務處．蘭州大學教學指導書，蘭大印刷廠，126—138
4. 牛亞軒、鹿立江，劉義循．數學系兩大主干基礎課的教學與改革，教學與研究(專輯)，1989(2)，18—23
5. 陳文嫄、羅學波、郭聿琦，基礎數學專業高層次人才的培養，教學與研究(專輯)，1989(2)，12—17

數學史研究文集第四輯 135—143　　　　1993年7月

語言、算籌符號與兒童算術教育

陳良佐
(新竹清華大學歷史研究所)

一、引言

作者在15年前撰寫的《先秦數學的發展及其影響》，曾提出我國位值制表數法之形成是由於漢語文的特點[1]，同時也發現漢語與具象的算籌符號，對兒童算術教育的影響很大。作者在《中國傳統數學位與象結構》又再度提出了這個看法[2]。該文是1991年6月在北師大舉行數學史會議宣讀的一篇論文。會後就此問題並請教科學院數學所幾位先生。多年來，一直想從實驗中證實作者這個假設，但因爲環境所限一直無法實現。這一假設，現在終於有了答案。1992年12月30日在美國發行的《世界日報》報道了密蘇里大學和北京全國教育科學研究院合作的一項研究計劃：比較說英語兒童與說漢語兒童學習算術之間的差異。報道之大意如下[3]：

> ……據信是第一次將算術技能與語言結合起來的研究。他們對兩國的幼稚園和小學一年級的學生進行了大量的研究。
>
> ……
>
> 吉爾利說："在學算術之前，中國孩子就領先了。……這是因爲他們的語言更容易用。這就意味着他們會比美國孩子更快地掌握算術。"
>
> 英文數字讀起來大多比中文數目長，另外英文十以上的數字具有更大的任意性(按：用詞不妥)，不如中文的好記(按：記數字不是重要的問題)。
>
> 例如，……美國學生還來不及說完 Seventeen，中國學生早就說出了衹有兩個音節的"十七"。
>
> ……語言的差別"給了中國人優勢使他們能用較復雜的方式解題。"
>
> ……
>
> ……加法計算時，中國幼稚園小班的孩子兩分鐘內平均比同齡的美國孩子多算十三題。到了一年级末時，此項差距擴大到三十九題。在計算方法上，研究人員發現中國孩子往往會心算，並且會將數字分解，如十二分解成五、五、二。而美國孩子通常是用手指頭。吉爾利說，美國孩子用手指頭算，是因爲英文使得數字不好記(?)。

上述新聞稿，作者不知道是否衹是研究結論中的一小部分，也不知其準確性有多少。就一個報紙的新聞消息而言，衹能就某一問題作簡單的浮面的描述。因此關於語言與兒童學習算術之間的關係，新聞稿不能作深入的論述，而且還免不了摻雜新聞人員錯誤的領會和不當的語詞。

關於中外兒童學習算術成績的不同，研究人員歸咎於語言的差異。這個結論是正確的。語言數音節多寡的不同，造成中外兒童算術成績的差異，也是對的。然而，說英語的兒童學習算術的成績、落後於說漢語的兒童，最根本的原因不是語言數音節的多寡，乃是英語語言數與位值制表數法不一致。

本文所要討論的問題，是根據語言數、位值制表數法以及表數符號來比較古今中外兒童算術教育。

二、語言數與數的概念、運算和時間

按兒童對數的概念與原始民族有許多相同之處。但不同的地方，人類在沒有語言數原始文明時期，就有了數的概念和簡單的計算[4]。然而現在的兒童以及當有系統的語言數完成以後的古代的人，却是先學習語言數，並透過語言數產生數的概念和計算。1534 年，Albert 說到計算的一個重要條件之一，就是讀數要正確(speak right)[5]。因此語言數是學習算術的一個重要環節。從語言數或寫成文字的語言數(暫時擱開符號數)到計算，大概經過兩個段落：

語言數(或文字數)→大腦→計算

第一個段落，各民族因爲語言的不同，讀數時就產生了時間上的差異。第二個段落，各民族因爲語言數结構的不同，進入大腦後在進行運算時也產生了不同的效果。

漢語因爲是單音節以及孤立的特點，所以語言數的結構非常簡單。最晚在商代，語言數就和今日相同，可以稱之"說出位值的表數法"(named place－value notation)，與今日阿拉伯數字符號之"抽象位置表數法"(abstract place－value notation)是一致的[6]。漢語語言數的結構祗有加和乘兩種，例如十八是一個十加八；三十二，3×10＋2。

西方屬於印歐語系，是語詞多變化的屈折語(inflectional language)。而語言數的變化更爲復雜曲折。語言數的形成有加、減、乘、除，以及加、減、乘、除混合使用等多種方式，今舉以下三例[7]：

58，拉丁語：*duo—de—sexaginta*；

英語：*two from sixty*，

古希臘語：*dyoȋn dέeontes hexέkonta*；

英語：*two lacking from sixty*，即 60－2.

153，古德語：*thria stunton fintzug ouh thri*，即 3×50＋3。

54，古挪威語譯爲英語：*one man less than half six tens* 即 50＋(10/2)－1＝54

根據前文簡單的描述，語言數之影響有三：數的概念；運算；運算的時間。下文將分別的簡單論述。

漢語的語言數形成的數列很簡單。是從最小數一，加一，漸漸的往上爬，與今日用阿拉伯數字符號表示的數列是一致的，1,2,3,....10,11,....而印歐語系的語言數所形成的數列，在形式上却是非常復雜。其中加法的語言數固然與漢語一樣，但是減法就不同了，就數列的形式而言是倒退。西方，從古希臘開始，有許多的語言數是用減法(Back －counting)，例如 9，(10－1)；8，(10－2)；7，(10－3)；18，(20－2)；……29，(30－1)；58，(60－2)；85(100－15)……[8]。按，這類語言數是從原始時期計數的方法而來的[9]，它們是用間接的形式來表示。例如 18，漢語是十加上八，是直接的形式；而拉丁語是 20，倒退 2 以後的那個數，是間接的，也因此對 18 這個數是模糊的。關於這類語言數的加法亦必是間接的，例如 58 加 18 如下：

```
      60-2
  +)  20-2
  ----------
      80-4 = 76
```

這種語言數是間接的表示形式，因此對這類數的概念也是間接的，對兒童培養數的概念和運算都是非常的不利。英語語言數直到現在仍然保留這類數，例如 58 分鐘："two minutes to six"。至於上文古挪威 54 的語言數，更是曲折的莫明其妙。從語言的表面上不能直接的與 54 發生聯係。學者稱這種語言數爲 overcounting(超算)[10]。

前面已經提到，計算之前首先讀數。因語言的不同，讀數消耗的時間就有不同。漢語三位數祇有五個音節。而西方大概都在十個音以上。例如153，漢語是五個音；英語，"One hundred and fifty three"則爲七個音節；十一個音，爲漢語的兩倍。因此，三位數的加減，説英語的兒童，單單讀數需要的時間，最低是漢語的兩倍。換言之，如果中外兩個兒童的算術能力完全一樣，但是在解題的速度上，説漢語的兒童算出兩題，説英語者止有一題。所以在長時間的算術學習，説英語的兒童就遠遠的被説漢語者抛在後頭。

三、英語語言數與位值制表數之間的矛盾

説英語的兒童學習算術時期，讀數需要較多的時間並不是嚴重的問題，而最重要者是英語語言數不利於運算，並且語言數與算術課本位值制的表數法發生冲突。説英語的兒童如何排除這些困境纔是他們所面臨的問題。

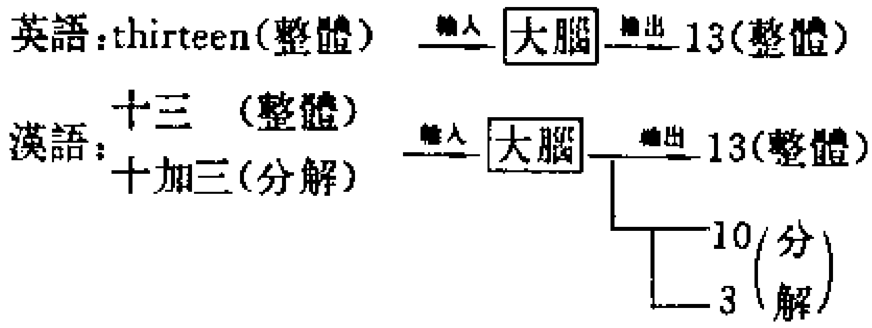
按，在印歐語系中，英語語法比較接近漢語。在理論上，英語語言數的構成，與漢語相同，都是用1－9、十、百、千等語詞組合而成。然而，兩者最重要的差異，是英語某些數詞之位值模糊不清，而且與現在位值制的表數法有冲突。例如eleven、tweleve，在語源上含有10與1、2的成分，是計數得到10以後，餘下1或2[11]，但在語言或文字形式上絶找不出任何痕迹。又20以下與100以下兩組數詞，根據語法，表示10的成分，是用語尾的變化，即－teen與－ty取代ten。但是兩者詞序恰好相反，例如16是six－teen，60是six－ty。後者，6與10的詞序，與現今算術課本上表數法一樣，但前者則相反。

上述英語語言數與現今算術表數法不一致的情形，如不加深思，似乎對幼兒没有甚麽關係。或有人認爲兒童不是語言學家，那能想到這些問題。這個説法不錯，不過説英語的兒童學習算術所發生的障礙也就在這裡。因爲現在表數制不是從印歐語系引發出來的[12]，因此二者之間的結構不盡相同。兒童學習數，最初的階段都在百位數以下，20以下的數尤其重要。而英語語言數與位值制表數法之間最顯著的矛盾恰好就是這一組數列。幼兒學習10－20之間的加法大概有兩種方式：第一種筆算，首先個位數相加，再十位數相加；第二種心算，將兩個數分成10與零數的和，再(10＋10)，(零數＋零數)。然而這兩種方式，都與英語語言數有矛盾。因此，説英語的兒童開始學習算術的時候，就需要克服語言數與位值表數法之間的矛盾。説英語的兒童所遭遇的困惑大概有以下兩點：第一，化解語言數與位值制之間的矛盾；第二，解决語言數之整體輸入大腦，又整體輸出造成不利於運算的情形。

11－19這幾個數，漢語之語言數和文字數，在形式上都很清晰的表明：10加上零數。而英語，從語法理論上來研究，也是1－9和10組合而成。但對兒童來説，這些數詞，每一個都是渾然一體，不能分開，如同score(20)一樣。換言之，兒童不能領會這些語言數，每一個都包含了兩個數的成分。例如eleven與twelve，兒童不會想到更是看不出它們是數到10以後，餘下了1，或2。對其他的數也是一樣，thirteen，是一個數詞，不去領會它是由10與3結合而成。如果有人從語法上解釋，thirteen是thir－teen，立刻就産生兩種情形：第一，它不是three－ten，而且會不會産生3與10有變化不確定的印象呢？第二，如果兒童接受上述的概念，又産生詞序的問題。即thir(3)－teen(10)與位值表數法13的次序恰好相反。説漢語的兒童完全没有這種困惑，十三實際是一個10和3。所以説英語的孩童開始學習算術的時候就要遭遇到語言數和位值符號表數之間的矛盾。

説英語兒童的第二個困難是從數詞爲一整體而産生的。例如thirteen既然是一個語詞，它所表示的數應該是1一直數到13，而不是分成1－10爲一組，1－3又是一組。因爲兒童並不把thirteen看成一個10(ten或teen)和一個3(three或thir)。所以當讀thirteen的時候是以整體的形式輸入大

腦,而又以整體的形式輸出與客觀的物數來認同。但説漢語的兒童則不同,"十三"是"一個 10 和 3"輸入大腦,而輸出的時候,可以整體的輸出,也可以分解的輸出。中外兒童語言數輸入大腦以後運作的情形,以圖形表之如下:



前者不利於加減運算。例如 13+7,説英語的兒童,thirteen 與 seven 以語言形式輸入大腦後,因爲不能將語言符號分解,所以很自然的將 13 加 1,加 1……一直加到 7,最後得 20,即 13+(1+1+……)=20。至於説漢語的兒童,十三輸入大腦,立刻分解爲 10 和 3,於是 13+7→10+(3+7)→10+10=20。説英語的兒童計算時常常藉用手指,從語言上來看,是很自然的事。而説漢語者善於心算,其原因也在此。所以英語語言數之整體輸入和輸出就成了兒童開始學習算術一道障礙。語言數整體輸入,再將數分解的輸出,説英語的兒童可能需要經過一段艱苦學習的歷程。

説英語的孩童是怎樣克服語言數與位值制表數法之間的斷裂呢?作者猜想可能有兩種情形:第一,用强制性的的記憶,迫使語言數與代表實物的圖或位值符號數彼此認同。例如 twelve 與 12 個蘋果(實物或圖畫)對應,或 twelve 直接與 12 發生聯係。第一種方式不利於加減運算,運算時可能需要借助於手指。第二種方式,從語法上分析,讓孩子認識語言數含有兩個内容,例如 thirteen 是 thir 與 ten 合成的,它們是 three 與 the 兩個詞的變形。不論採取那一個方式,説英語的孩童與説漢語者相比,都需要一段艱苦的學習階段。

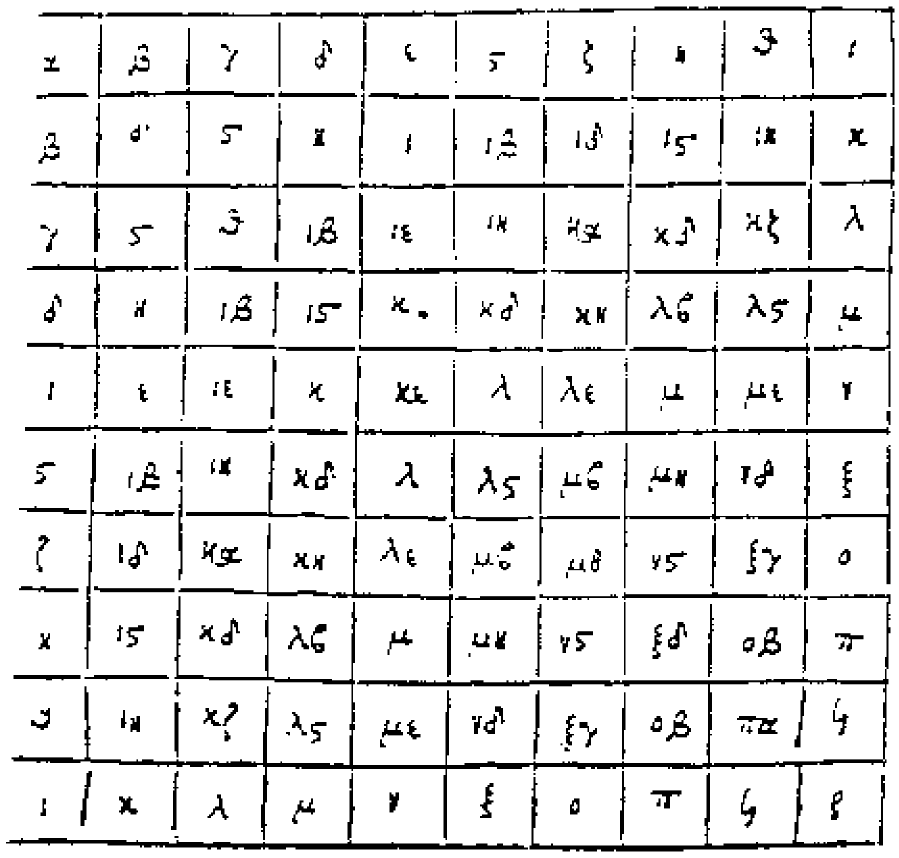
四、九九乘法表與九九歌訣

所謂"九九乘法表"是把(1—9)×(1—9)的數排成一個表,以備乘除時查看。九九歌訣是把那個表編成歌訣存檔在大腦中。西方從古希臘時代就出現了乘法表,如下;近鄰日本也有九九表,如上[13];但在中國衹有"九九口訣表"。九九歌訣一旦記熟了,當應用時,即刻從記憶的組織中提出,需要的時間,大致不超過一秒。而查看九九表可能遠超過九九口訣需要的時間。兩者時間的差不難測量,不知美國研究小組是否作過實驗。中西兒童到了學習乘除時,雖然用了同等的時間,但得到成績却不一樣,這是因爲使用九九表與九九歌訣花費的時間不同。

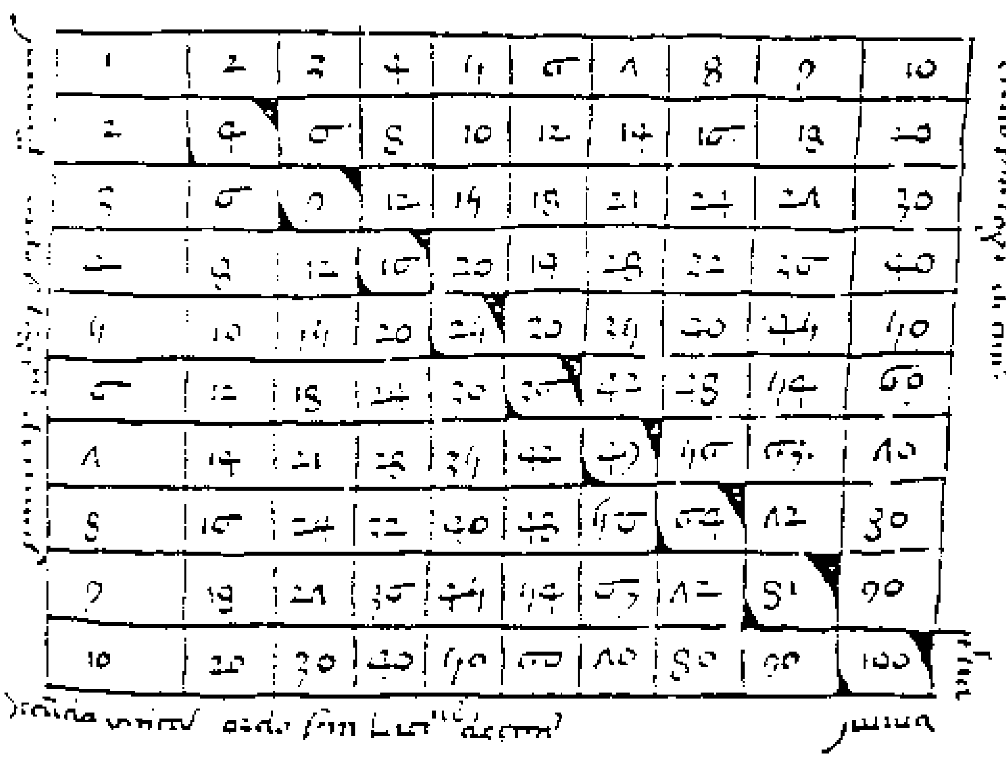
現在要追問,爲甚麽九九歌訣産生在中國?這就必須再回到語言。因爲漢語是單音節、孤立的語言,現代國語衹有一千三百多不同的音綴[14]。現在的語言就是用這些音綴組成的。漢語每一個詞都是固定不變的,没有任何語形的變化。漢語與西方相比,没有"時"(tense)、"數"(number)、"性别"(gender)、"語氣"(mood)等的區别。高本漢原:"中國話實在太簡單。"[15]漢語句子有很多的省略,省略的範圍很廣,"有主語的省略、謂語的省略、賓語的省略、兼語的省略四類"[16]。例如,"來了没有?"這句問話是省略了主語"他"。至於時句的結構,省略的成分就更多了。例如劉長卿《秋杪江亭有作》:

寒渚/一孤雁,夕陽/萬重山。

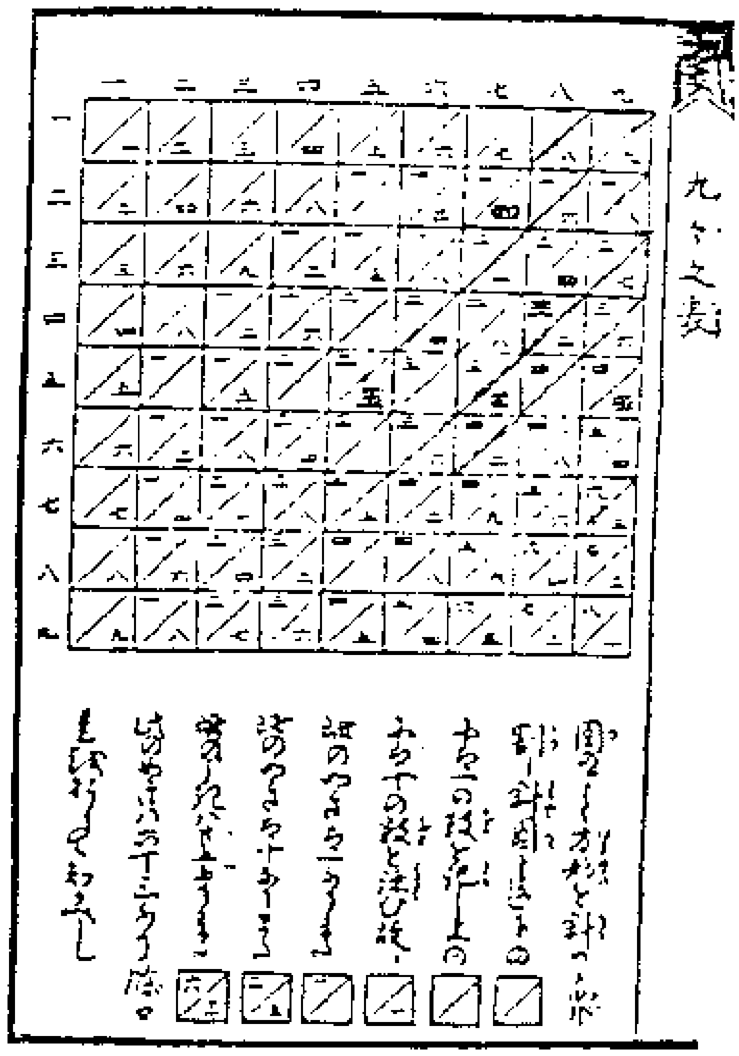
兩個詩句衹有形容詞與名詞。又馬致遠《秋思》,從"枯藤老樹昏鴉"到最後一句"斷腸人在天涯"五個詩句中,也是衹有形容詞與名詞[17]。



希臘時代的九九表



歐洲(c.1500)乘法表



九九歌訣是以四、五個字的詩句編成的，多數止用數詞(名詞)依序排列。例如二/四/得八、三/七/二/十/一，祇有“得”爲動詞。後者，就語法而言，是“三乘七得二十一”，乘與得兩字都省略了。three/seven/twenty－one 這類句型永遠不可能出現在印歐語系中。相反的，祇有漢語纔能出現九九歌訣那種句子。

九九歌訣大致在春秋戰國已普遍流行於民間。《韓詩外傳》(卷三)記載：

齊桓公……爲使人欲造見者，期年而士不至。於是東野有“鄙人”[18]以九九見者。桓公使戲之曰：“九九足以見乎?”鄙人曰：“……夫九九薄能耳，而君猶禮之，況賢於九九者乎!”

這個故事,《漢書·梅福傳》也記載。顏師古《注》:"九九,算術,若今《九章》、《五曹》之輩。"按,顏《注》不妥。因爲《九章》、《五曹》這類算學書不是"薄能",也不是一個鄉下人所長。"九九"應當指"九九歌訣"而言。《周髀》,"矩出於九九八十一",趙爽《注》:"九九者,乘除之原也。"又《夏侯陽算經》(卷上):"夫乘除之法,先明九九。"所以《韓詩外傳》中的"九九"即"九九歌訣"。

居延、敦煌出土漢簡中的"九九口訣表"都不完整。敦煌漢簡最多,共十六句,除了二十、三十、四十爲合文外,餘者與今日相同,例如"七八五十六"、"二三而六"[19]。作者在先秦的典籍中搜集到的九九口訣有12條,與今日相同,例如,"三七二十一"、"六六三十六"[20]。

《韓詩外傳》的作者韓嬰,漢文帝時(179—157B.C.)立爲博士。如果《韓詩》所載是來自春秋時代的史料,這就表明九九口訣在那時就流行於民間了。不論如何,九九口訣在戰國時代已經廣爲流行,當無疑問。

九九口訣的流行,説明乘除運算在民間普及的情形。《老子》曰:"善數不用籌策。"善數者,似乎不僅衹會加減,應該還有乘除。先秦和兩漢乘除法運算的步驟如何,不詳。不過第四、五世紀《孫子算經》記載的乘除法,除了有進位和退位的步驟外,餘者,基本上與現在的法則没有區别[21]。至於西方,乘除法很難學習。1570年左右有一手稿本記載流行當時的一首詩:乘除法令人發狂。詩云[22]:

乘法原非易,
除法亦不良,
比例之法更艱難,
習之每令吾發狂。(And practice drives me mad.)

西方古代除法之難是近代的人無法想像的。從羅馬到Grebert(c. 980)應用之"補足除法"(complementary divison)[23],以今日觀之,真的令人發狂。

五、算籌符號與兒童算術教育

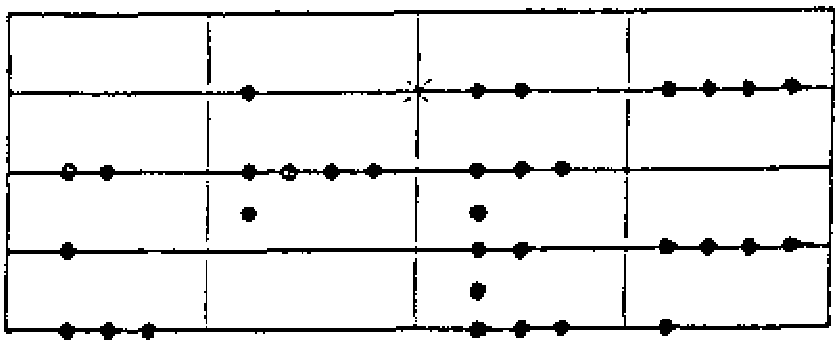
按兒童與初民一樣都缺乏抽象概念。在希臘以前,幾何概念與實物結合爲一體,埃及人就是把一條拉直的繩子當作直綫,田的周界是長方形[24]。畢氏學派雖然將數學予以抽象化,但他們仍然認爲數(number)不能離開意念的實物而存在。(Number did not have a detached existence apart from objects of sense.)[25]考之文化落後的民族,確是如此;他們衹有二隻羊、三條牛,没有與物分開的數一、二、三……。因爲這些抽象數對他們來説是無意義的。

幼兒對數的認識和初民一樣,數與物是一體的。雖然大人可以教道孩童背誦數,但那些數對他們來説是無意義的,與鸚鵡模仿人的語言類同。

按阿拉伯數字符號最大的優點是一筆完成,便於書寫。但根據前言,對兒童學習算術來説,阿拉伯數字是最壞的一種符號。因爲阿拉伯數字没有物、數一體的意義,而是純抽象符號,不能促進兒童對數的了解。

中國古代1—9的算籌數是教道兒童認識數最好的一種符號。因爲它們仍然保留了數、物一體的意義。1—5的算籌符號,𝍩𝍪𝍫𝍬𝍭保留了初民借樹枝,竹棍或手指等計物的象。6—9,𝍮𝍯𝍰𝍱,横畫還是竹棍計數的象。竪畫代表5,雖然可以視爲抽象符號,但還是可以視爲竪立一根竹棍或手指來代表5的象。按初民計物是先分組,通常是5個一組,或10個一組爲最普遍。如果以5爲集合單位(collective unit),可以用横的竹棍或手指代表1—5個物件;以竪立的竹棍或手指代表5,横者代表1—4,於是就可以得到6—9的算籌數[26]。算籌符號的起源是否如此,姑且不論。而6—9的算籌符號,竪畫|代表5,横畫代表1—4,應該無疑問。使用這種方法來教導兒童,也很容易被接受和領會。

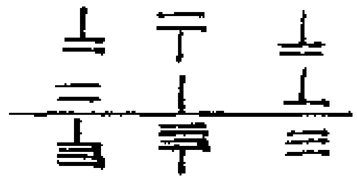
中國算籌符號不僅容易引導孩童有數的概念，而且有利於加減運算。例如 ╧ 加⊥，可以不加思索的，用直觀的方法即刻得到結果，即橫畫相加是 6，豎畫相加是 10，故得|⊥；兩數相減，立刻得知是 二 。中國利用籌算進行加減運算，與西方用算子在算板上運算是同樣的意義，但西方是用雙行或兩列表示一個位，在視覺上比較復雜，加減時也比較曲折，例如 16 世紀 Albert 一個加法[27]：



(213＋1450＋2378＝4041)

至於西方的筆算比籌算就更麻煩了。例如 777＋216＝993，羅馬數字符號和算籌符號相加的情形，如下圖[28]：

DCCLXXVII
CC X VI
DCCCCLXXXXIII



古希臘的筆算比之羅馬對兒童而言，更爲困難了。希臘人是用字母表數如下[29]：

α	β	γ	δ	ε	τ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	η	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	η	φ	χ	ψ	ω	T
100	200	300	400	500	600	700	800	900

χα＝21；ρνγ＝153。希臘人加減運算與今日之筆算相同，個位數與個位數放在同一行[30]。例如 153＋21＝174，形式如下：

$$\begin{array}{r} \rho\nu\gamma \\ +\ \kappa\alpha \\ \hline \rho\zeta\delta \end{array}$$

希臘人用字母表數來進行運算，不利於兒童的學習。因爲它們全是抽象符號，兒童不能從符號的表面觀的產生與物數發生任何的聯想。阿拉伯—印度數字也是一樣。

六、結語

語言對數學的影響是多方面的。語言的第一個影響是系統表數法。按人類在原始文明時期，未有語言數之前就有了數的概念，以及原始記數法，如刻契、結繩等……。然而當人類進入文明時期以後，人類建立起來有系統的表數法，顯然受了語言的影響。古希臘用字母表數，表明希臘的系統表數法是在語言之後。羅馬符號表數法與語言數是一致的，說明符號表數法是依據語言數[31]。商代甲骨紀數也一樣。

因爲漢語的特點是單音節和孤立的語言，所以位值制的語言數是漢語自然形成的。漢語語言數成了文字數以及算籌符號數的範式，九九口訣也是單音節、孤立的漢語特點以及漢語獨特句法結構形成的。漢語、具象的位值制算籌符號以及九九口訣是中國古代算術快迅發展的最主要利器。

語音的長短固然與兒童學習算術有關。但是西方語言對幼兒啓蒙算術教育最大的障礙是：語言數與現今算術課本上的表數法有矛盾。西方語言中位的觀念不清晰，以及詞序與阿拉伯位值制表數法中的"位"不一致。其次是西方語言數是一個整體，整體的輸入大腦，整體的輸出，不利於兒童加法運算。說英語的兒童在學習算術時，克服這些障礙必須經過一段艱苦的歷程。

按兒童可以說沒有抽象概念，數離開物體對兒童來說是無意義的。而阿拉伯數字是純抽象符號。這套符號不能帶領兒童進入數的概念，中國古代的算籌數是具象的，可以傳達物數對應的情景，而且非常容易進行加減運算。所以作者認爲算籌數應當是兒童算術啓蒙教育最好的一種符號。教導兒童阿拉伯數字似乎應當晚一點。

參考文獻與注釋

1.《中央研究院歷史語言研究所集刊》，第 49 本，第 2 分册，P. 289，1978，臺北。

2.《漢學研究》，第 10 卷，第 1 期，PP. 137－161，1982，6 月，臺北。

3. 此報道消息是清華大學賴建誠教授到哈佛作訪問學人時寄給作者。以往作者曾與賴教授談到個人觀點以及想要作實驗的構想。所以賴教授見到此消息，立即寄來剪報。在此，謹向賴教授深致謝意。

4. Karl Menninger, Number Words and Number Symbols, pp. 33—39, 1970.

5. David Engene Smith, History of Mathematics, p. 182, 1925.

6. 關於語言與位值制的表數法，將見拙文"語言與位值制表數法的形成"。

7. Menninger, pp. 74, 72, 75.

8. Menninger, pp. 71, 74, 76, 86, 170.

9. 將見拙文，注 6。

10. Menninger, p. 76.

11. Minninger, pp. 83－84.

12. 印度表數位值制的概念可能來自五世紀初到印度的中國和尚道整。道整於公元 399 年從長安動身，到了中天竺阿育王的都城巴連弗邑後"迷停不歸"。道整很可能把中國算籌符號的位值概念帶給印度。將見拙文"語言與位值制表數法的形成"。

13. Graham Flegg, Numbers Through the Ages, p. 89, 1989. D. E. Smith, History of Mathematics, p. 125，九九表的年代大約是 1500 年。

14. 周法高．中國語言研究，pp. 7－8，1975，華岡出版部，臺北。

15. 高本漢原著，杜其容譯．中國語之性質及其歷史，p. 10，1978，中華叢書，臺北。

16. 黄六平．漢語文言語法綱要，p. 40，1983，漢京文化事業有限公司。

17. 從表面上來看，"夕陽西下"的"下"是動詞。實際這一句是表示太陽西下黄昏的那個時刻，不是形容太陽正在西方下沉。

18. "鄙人"二字，作者根據《說苑・尊賢》補。

19. 中外數學簡史編寫組．中國數學簡史，p. 69，1986，山東教育出版社。

20. 見拙文"先秦數學的發展及其影響"，p. 290。按，原文漏掉了《管子・地員》中"四七二十八"這一條。《呂氏春秋・制樂》、《荀子・大略》。

21. 見拙文"我國籌算中的空位——零——及其相關的一些問題"，《大陸雜志》第 54 卷，第[illegible]，

1977。

22. Florian Cajori, A History of Elementary Mathematics, P. 189, 1897;譯文見曹丹文《初等數學史》, p.204。

23. 同前注,原文, PP. 116－117,譯文, PP. 124－125.

24. Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern times, p. 29, 1974.

25. 同前注。

26. 按後世橫式算籌符號,可能不完全是直接從甲骨文字演變出來的。1－4、10 甲骨文、金文以及算籌符號都相同,而算籌符號 5－9,可能是春秋戰國時代纔有的,特別是戰國時代貨幣紀數出現的爲最多。

27. Smith, p. 184。

28. 羅馬數相加,見 Smith, p. 91。

29. Kline, p. 132.

30. Kline, p. 133.

31. Karl Menninger, p. 44:"The Romans thereby created a numerical symbol that quite graphically reflects the number word ……"。

数学史研究文集第四辑 144—147 1993年7月

傳統數學的程序化與數學教育

柏 森
(重慶通信學院數學教研室,重慶,830035)

一 傳統數學及數學教育的特點

中國傳統數學的特點是以算爲主,及計算方法的程序化與機械化。不僅如此,以《九章算術》爲代表的傳統數學教材,無論作爲教材的結構,還是對問題的解决方式上,都具有程序化與機械化的特點。它們的程序可概括爲:

教材程序:問題→解法→原理→問題

解法程序:問題→歸類→模式化→程序化籌算。

因此,我國傳統數學教育的特點是:問題中心,從例中學[1]。而西方傳統數學教育的特點是:演繹中心、從證中學。這從西方傳統的數學教材《幾何原本》中不難看出。

我認爲,上述中國傳統數學的特點:以算爲主及計算方法的程序化與機械化,僅是針對中國傳統數學的內容及算法表現形式而作出的結論,却没有指明傳統數學的數學思想及數學思想的特點是甚麽。我認爲,我國傳統數學中始終蘊含着深刻的程序化思想。中國古代數學家也正是遵循程序化的思想來研究問題、解决問題的,從而纔使得計算方法上表現出程序化與機械化的特點。這不僅能從《九章算術》的解題方法體會到,而且能從比較開普勒與劉徽計算圓面積的方法,得到一個典型的例證。開普勒是"把圓看做邊數爲無限多的多邊形,把圓的面積看做由無限多個無限小三角形組成。"可以說這是"一步到的"的計算方法,無程序化思想可言。而劉徽的割圓術則是有程序的兩步:①先求圓内接正 3×2^n 邊形面積 $S_{3\times2^n}$;②再是當分割無限細密時止須"情推"而"不用籌算"的"非機械化"思想[2]。筆者還認爲,這種深刻的程序化思想,是産生算法機械化的思想基礎(而算具"籌"是産生機械化算法的物質基礎),還是傳統數學没有走向演繹體系的原因之一。

之所以說我國傳統數學的程序化思想是深刻的,是相對西方傳統數學的公理化演繹體系而言的。西方傳統數學是按照"定義→公理→定理"的程序去構造演繹體系。它雖然也有一種程序,但這僅是表現形式上的,而最深刻的還是邏輯演繹的思想。此其一。其二是,中國傳統數學程序化思想的深刻性還表現在,當西方的演繹思想傳入我國後,我國傳統數學没有受到冲擊。一個明顯的例證是,"歐幾里得"傳到中國後,没有被很好地吸收,從而未能影響到中國傳統數學的程序化思想。

我們研究數學史要象吴文俊教授所指出的那樣"不能停留在爲史而史,不能光搞清楚歷史上事物的發展情况,而更重要的,我想是'古爲今用'"[3]。也就是說我們應吸取歷史的精華,把傳統數學發揚光大。這是每一個數學工作者,特别是數學教師應盡的責任,本文就此談點體會。

二 傳統數學如何發揚光大

傳統的東西,要發揚光大,其途徑可能是多方面的,但根本的一條途徑應該是教育。筆者從多年數學教學實踐中體會到:傳統數學中蘊含的深刻的程序化思想在數學教育中是可以繼承和發揚的。具體的做法是,在教學中應突出如下兩個方面。

(一)突出教材的程序化結構。

現行的高等數學教材的程序化結構是:實際問題→定義→定理(法則、公式)→實際問題。這些

本保留了傳統數學教育的"問題中心,從例中學"的特點。以問題爲中心的研討式學習,對培養創造型的傑出人才是不可缺少的。因此,傳統數學教育的這個特點是可以繼承的。但是,還應該看到,現行高等數學教材是中西傳統數學雜交而成的,既有西方傳統數學的邏輯演繹思想;又有中國傳統數學的程序化思想,但二者均未體現充分,形成有機結合的體系,尤其是程序化思想未能很好體現。一方面,現行教材的章節銜接筆墨不多,轉變得很突然,多是直接抬出某一定義或法則、定理。應當加強章節間的程序化延續。《九章算術》中按問題的不同類型分爲"方田、粟米、衰分……"九章,就很自然,是可資借鑒的。另一方面,現行教材没有突出思維的程序(或曰過程)。好的教材應該力求按照科學知識發現和發展之程序,並符合學生認知心理之程序來寫。即發揚傳統數學的程序化思想。教師在教學時要突出這種程序,要把教學做爲有程序的認識"過程"來進行,不能做爲灌輸"結果"來進行。即不能把概念的出現(或定義某一概念)或定理、公式,甚至一道例題的具體解法,做爲"結果"直接"抛"給學生。這種過分壓縮知識的發生過程的教學,不是傳統的精華,而是一種時弊,當糾正之。

突出教材的程序化結構明顯的作用有二。一是便於學生總體把握教材,明確各章節結構類似,有利自學。二是便於回答學生提出的"學了有甚麼用"的問題。大學生的學習從中學時代的"要我學"逐步轉變爲"我要學",經常要問學了有甚麼用的問題。突出了教材的程序化結構後,學生看到了數學本身就是從實際問題中來,又回到實際問題中去。這樣比簡單地回答"在專業課中用"、"用來訓練我們的思維"要好得多,也有利於消除數學神秘論。

(二)突出解題的程序性思維。

所謂程序性思維,它是邏輯思維的一種形式,是指主觀按照一定指向、一定程序而進行的思維。大、中、小學數學教育中,教師自覺不自覺地遵循了程序性思維。如教師强調的先分析題目、尋找解題方法,再寫出解題步驟等。解題時固然需要發散思維,但應看到,程序性思維是發散思維的基礎。没有良好的程序性思維,發散只能是無目的亂發散,是無意義的發散。因此,有必要把程序性思維的培養提高到理論的認識,變成完全自覺的有意識的活動,即繼承和發揚傳統數學的程序化思想。在數學解題教學中突出程序性思維的具體做法有如下兩點。

1. 在尋找解題方法時,培養程序性思維。在這一點上,傳統數學的解題程序:問題→歸類→模式化→程序化籌算,是可以繼承的。繼承傳統數學這種"歸類"、"模式化"思想,就是將形形色色的問題歸納分類,使問題規範化、模式化。一般說模式積累越多,把數學問題轉化爲模式越容易,於是解題方法也越多[4],而程序性思維起着有效地尋找"轉化工具"的作用。因此,解題時,我們要培養學生的程序性思維是:首先要力求把握問題的實質,再去尋求有關的基礎知識和解題工具(定義、定理、公式等),運用知識間的內在聯係和相互依存關係,挖掘隱含條件,使復雜的非常規問題歸類爲有序的常規問題,從而找到問題的解法。最後再按部就班地作一些程序化操作和計算。突出了尋找解題方法的程序性思維,在解題時就可減少畏懼感、避免盲目性。

去年放寒假時,在火車上遇到一些一年級的大學生,了解到我是大學數學教師,隨即就問起期末他們剛考的一道題來。題目是:求

$$\int \frac{1}{x^4}\sqrt[3]{\frac{x}{1+x^4}}dx$$

初一看該題確實難解,他們未做出來。我只告訴了他們,我在教不定積分時强調的尋找解題方法的程序性思維口訣是:

牢記積分公式表,"湊微分"先考慮到;

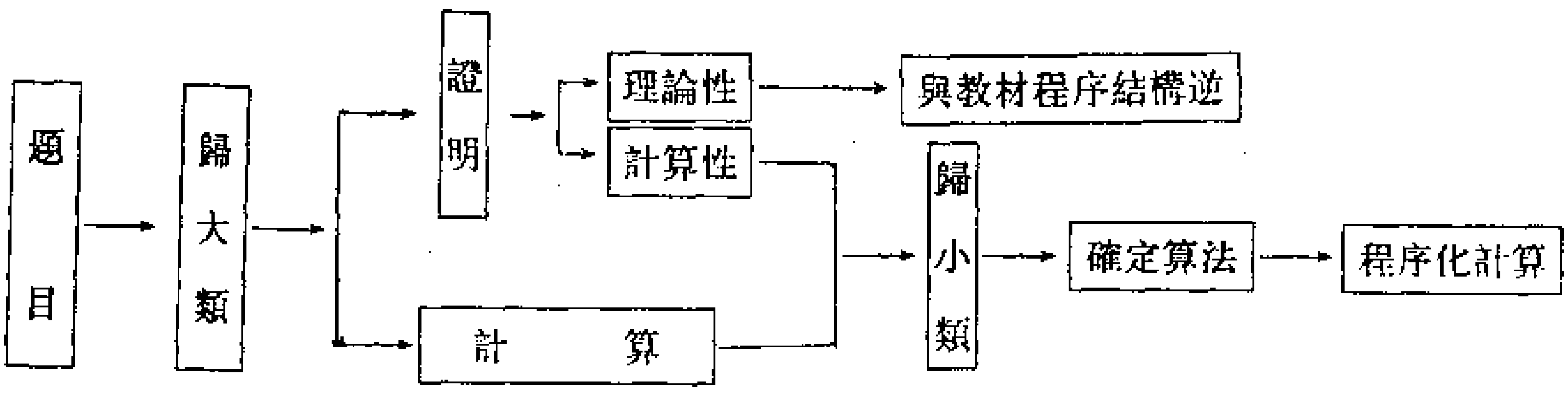
湊不出來不要躁，分清類型好下藥；

兩函相乘"分部好"，含有根式"去根號"；

"有理函數"解决了，"萬能鑰匙"把的牢，

何懼"無理"與"三角"，走投無路"就顛倒"。

在這裡帶引號的依次指：湊微分積分法，分部積分法，無理函數的去根號積分法（也稱第二換元積分法），有理函數的積分，三角函數的萬能代換積分法，被積函數爲無理函數和三角函數的不定積分，倒代換積分法。按照這個程序尋找解題方法，起初想到用無理函數去根號方法，令$\sqrt[3]{\frac{x}{1+x^4}}=t$，還是做不出來。但有了這種程序性思維口訣，他們一點也不慌亂，很快就找到作倒代換來解決這一題是比較容易的。其他象極限、導數、重積分等內容，都可以總結出類似的尋找解題方法與捷徑的程序性思維口訣。總之，尋找解題方法的程序性思維可概括爲：



2. 在具體解題步驟上，培養程序性思維。傳統數學的程序化籌算的特點，也是可以繼承和發揚的。具體作法是逐步讓學生樹立起這樣的觀念：解數學題的本質實際上是有程序的連續化簡。這程序就是知識增長過程之逆，是將新問題轉化爲舊知識、舊概念的過程。例如在講三重積分的計算時有：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv \overset{①}{=} \iint_{D} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$
$$\overset{②}{=} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$
$$\overset{③}{=} \cdots$$

等號①實質是將三重積分化簡爲已知的二重積分與定積分，等號②是將二重積分化簡爲更已知的定積分。一步步化簡，最後只是算三個簡單的定積分而已。在數學中相當大的一部分題都是如此．在教學時，要講清概念，講例題時盡可能講清其思維程序，强調每一步都要有根據、有道理。幫助學生樹立起解題的本質是有程序的連續化簡的觀念，培養學生的程序性思維，對於解題是有益的。更何況計算機普及的今天，嚴格程序化的計算機語言的學習，高校即將開設的《數值計算方法》的學習，以及工程技術人員自身的素質要求，都需要良好的程序性思維習慣。那麼，在教學中培養學生的程序性思維，不僅是對傳統數學思想的繼承和發揚，還是一種未來意識的體現。具體說，在數學教育中培養學生的程序化思想還有下列作用。

(1)、成"序"在胸，臨"題"不懼。在教學中，我們常發現這種情況，學生遇到題目，總想死套公式，依葫畫瓢。遇到綜合題目，瞎摸亂碰，不是朦朦朧朧做對了，就是糊裡糊塗地做錯了，自己說不出自己的思考過程。稍遇挫折就灰心喪氣，或遇稍難的題目就不知從何下手，感到害怕。只要我們講清

了概念(定義),再培養起學生尋找解題方法的程序性思維,上述情況就可避免或減少。

(2)、把握思維脉博,有利提出問題。愛因斯坦說:"提出問題比解決問題更重要",因爲它"標志着科學的真正進步"。學生樹立起了解題的本質是有程序地連續化簡的觀念,在解題時對自己化簡的每一步用到的定理、法則考慮清楚,遇到解不下去時,容易了解自己解不下去的原因,就會提出有没有别的定理、法則可用,有没有别的化簡程序,有没有遺忘了舊知識等問題。這樣,學生猶如把握了自己解題時思維的"脉博",提出一些有益問題,並爲解決問題提供了指向。這雖説不上是標志着科學進步,但它標志着學生學習的進步。

(3)、明了思維過程,掌握教學情況。了解學生的思維過程是教師教學過程中時刻要注意的環節。有了程序性思維及解題時的有程序地連續化簡的觀念,教師在講題時,也便於用傳統教育的優秀方法:"不憤不啓、不悱不發",從而有益於啓發學生的思維。在改作業時,也能明了學生到底是思維的那個點出了問題,以便糾正和彌補。

(4)、看到前進脚印,增强毅力耐心。學生往往也有這種情況,遇到稍難或計算稍繁的題目,就半途而廢或抄上書後答案了事。這對學生計算能力的增長很不利。但衹要樹立起了解題的本質是有程序的連續化簡的觀念,學生明白每前進一步,就接近目標一步,猶如看到了前進的方向,從而增强學生的毅力與耐心。

綜上所述,發揚傳統數學的程序化思想特點,有了尋找解題方法的程序性思維,在解題時方向清楚,避免了思維的盲目性,便於找到解題的方法與途徑。在解題中,有了連續化簡的信念又增强了毅力與耐心,從而有利於提高解題能力,有利於提高教學質量。但是,這種培養又有其局限性,如不加以引導,則易陷入死板與機械,不利於學生發散思維的培養,不利於思維靈活性與創造性的發展。因此,在培養這種程序性思維時,應該注意不能只突出一種而忽略别的,不能僵死不活。學生學到一定程度對一些問題可以一看就明白其解法,此時不能再死板地强調按程序性思維去尋找方法。

如何使傳統數學發揚光大,乃是一個十分有意義的大問題,值得深入地研究。本文僅是筆者在數學教學中繼承和發揚傳統數學的一點體會,談出來以求教於各位學者。

參考文獻

1. 查有梁.《九章算術》的教育模式."《九章算術》暨劉徽學術思想國際研討會"論文,1991.
2. 李繼閔.《九章算術》及其劉徽注研究.西安:陝西人民教育出版社,1990,464—465.
3. 吴文俊.會議主席吴文俊教授在開幕式上的開幕詞,北京師範大學學報(自然科學版)第27卷增刊3,1991,北京:北京師範大學學報(自然科學版)編輯部.
4. 陳彰林.數學模式在解題教學中的作用,數學教學第五期,1991,上海:華東師範大學出版社.8—10.

數學史研究文集第四輯　148—153　　1993年7月

論中學數學教學中數學史的教育價值

劉隆華
（貴州省羅甸民族中學，550100）

讀史使人明智，數學使人精密。數學是一門古老而又有着巨大發展潛力的科學，它的發生與發展，歷史悠久，源遠流長，成果卓著。中學數學課本編入比較豐富的數學史料，課本中直接介紹數學史，特别是中國數學史的就有十七處，涉及到數學家、數學名著、成就、方法等近五十多個方面的內容，構成中學數學教材的一個重要組成部分，是學習數學方法論的基礎和綫索，是進行愛國主義教育培養民族自豪感的主要內容。

學習和研究數學史，有十分重要的意義。在中學進行數學史教育，可以追源培養史學觀念，有助於全面深刻地理解數學知識；可以開闊視野，提高境界，有利於尋求有效的教法與學法；可以看到數學概念、理論、方法形成的復雜曲折的歷程，了解數學發展的成功與失敗、經驗與教訓，以提高歷史鑒别能力，同時從前人的過失與成就得到教育與鼓舞；可以了解前人刻苦嚴謹的治學精神和崇高的思想品格，激發學習興趣，提高學習積極性，弘揚民族精神。

關於數學史教育，在我國未得到足够的重視。由於歷史和現實的原因，相當一部分教師數學史知識貧乏，而中學數學教材對知識的發現、發展的歷史提得很少，教師若要引導學生從歷史發展的角度看思想方法也就比較困難。如何在中學數學教學中納入數學史教學，是值得認真思考的問題，涉及到數學史的教育價值以及教師對自己有機進行數學史教育所提出的標準。因此，如何正確認識數學史的教育價值不僅具有理論價值，而且具有實踐意義。本文就數學史在中學數學教學中的認識價值、德育價值和美育價值作初步討論。

一、認識價值

數學史是研究數學發展進程與規律的學科。它對學習和掌握數學知識及過程、發展人的認識能力，指導人們認識和改造世界具有重要意義。

1. 鍛煉思維，啓迪智慧

人類最愉快的動作是數學操作，人類最高級的享受是數學發現。在中學教學中，數學一直被看成訓練思維的精密、鍛煉創造能力的有效學科，並且認爲數學教育價值的一半就在於此。數學史則爲實現這一價值提供豐富而有力的材料。大量的事實充分表明，數學史在我們認識世界過程中科學方法的强大作用，顯示出在解决科學與實踐問題中抽象思維的巨大意義，揭示科學理解能力的形成過程和科學理論的出現與發展方法。

我國數學家吴文俊正是在研究數學史的過程中得到啓發、獨辟蹊徑，從幾何公理體系出發，引進坐標，將任意幾何問題代數化 — 將所證明問題的題設與結論表示成多元多項式方程 — 在計算機上證明六百多條定理，實現了人們千百年來幾何公理機械化證明的夢想。他説"幾何定理證明的機械化，從思維到方法，至少在宋元時代就有蛛絲馬迹可尋。雖然這些是極其原始的，但是，就本人而言，主要是受中國古代數學的啓發。"

從信息論觀點來看，任何客體的存在都有着其信息，人們只有掌握了某種信息，纔能產生相應的控制。任何一門學科都有轉化和演變過程，只有弄清它們的繼承、積累和發展的來龍去脉，纔能理解其本質，掌握並加以運用和發展。數學是一門不斷運動變化，來源於實踐的科學，它的基本概念、基本常識往往是最深刻的科學思想之所在。學習數學史能了解數學概念和方法的演變過程，深刻地理解，靈活的掌握與運用，同時使人的思維得到鍛煉，使認識與結論具有更嚴格的邏輯性。

每個學習數學的人，都希望自己能敏捷而又巧妙的解決各種數學問題。然而教科書却沒有告訴我們如何做到這一點。教科書上記載的都是經過嚴格邏輯整理的數學成果，以及爲理解這些成果所必需的例題、習題和答案。至於解決數學問題，獲得數學成果的思想方法，一般是不講的。於是，學生只好靠教師的經驗性指導和自己的苦心摸索，纔能逐漸獲得分析和解決問題的能力。這實際上是在不自覺的重復前人的思想歷程，因而，必然重演前人思想方法上的經驗教訓。如此說來，要是能了解前人的思想方法，豈不是可以啓迪智慧，少走彎路，更快更好的具備解決數學問題的能力嗎？

2. 開發智力，培養創造性思維

當前，我國中小學致力解決的一個重要問題是：實現從應試教育到素質教育的轉變。素質教育要求數學教學必須使學生具備"數學文化素質"。作爲人的智能的重要組成部分的數學素質，其核心是數學思維的素質。在中學，數學思維的培養以培養學生的形象思維、抽象思維及創造性思維等爲主。而數學史教育正是開發智力，培養和發展學生創造性思維的有效途徑。

現代數學教育把"解决問題"放在核心地位，這是因爲通過問題求解能激發思維活動，發展思維能力。科學發展的每一個時代都有自己的問題，重要的問題歷來是推動科學前進的動力。例如，希爾伯特的23個問題，橫跨數學的整個領域，成爲世界數學史上的重要里程碑，爲二十世紀的數學發展揭開了光輝的第一頁。歷史上的許多數學問題，通過數學家探究過程及有價值的結果使之具有極大的吸引力，能使學生的思維境界得到提高，學會提出問題，創造性的解決問題。

數學及其各個分支的發展史上，都存在着重大的轉折時期。轉折時期存在着突破，或者說，正是突破帶來了轉折。因此，將數學發展史上的轉折時期爲重點，通過選擇突破口的介紹，有利於激發學生的創造性思維。例如，介紹數學中演繹法的開始採用、無理量的發現、解析幾何的發明、微積分的問世、非歐幾何的發現、電子計算機的產生等一塊塊數學史上的里程碑，對提高學生的數學思維大有裨益。

同時，科學發展的道路是不平坦的，數學家們走過的路是布滿荆棘的，是經過艱苦曲折的思維推理獲得的結論。然而數學家從不按照他們發現創造的真實過程來介紹他們的工作。至於教科書則將表達的思維過程與實際創造的過程完全顛倒，按定義一公理一定理一例題的模式編寫，教師的任務是舉例，講解，學生的任務是模仿，唯一留給學生活動的機會就是解題。誰都知道，數學家從來不是以這種方式來研究數學，他們常常憑藉數學的直覺思維，作出各種猜想，然後加以證實。在教學中，根據數學史料精心設計問題，讓學生走一走歷代數學家走過的路，使之得到啓迪，進而根據自己的體驗，用自己的思維方式，"再創造"很多的數學，有利於培養創造性思維。也只有這樣，纔能看到歷史的本來面目，纔能產生真正的"歷史感"。

3. 掌握學法，學會學習

教學中，如何使學生掌握學法，學會學習是一個極其重要的問題。然而沿着科學的、歷史的足迹來剖析數學史實，能使學生養成良好的思維習慣，掌握正確的學習方法。因此，要注意探索知識的發生過程，研究數學家如何得到啓示，達到偉大的發現的，他們走過哪條路徑，採用哪些思維方式、突

破的關鍵在哪裡，並將這一切合情合理地剖析出來，教給學生，使學生採用最佳途徑去獲得最好效果。

例如，劉徽在注《九章算術》時，已發現其中求球體積的錯誤，並通過研究得到球體積應等於外切於它的一個"牟合方蓋"的體積的$\frac{\pi}{4}$的結論。劉徽是怎樣得到這個正確結論呢？事實上他是用了類推法。在注《九章算術》時，劉徽發現圓柱、圓錐、圓臺與同高的外切方柱、方錐、方臺的體積之比等於同高處橫截面積之比。因此，求球體積只要找一立體，其體積與球體積之比等於同高處截面面積之比即可。由於劉徽是將球體放在從圓柱到圓臺這一辯證過程中的一個延續，而且其截面應是正方形，又與該球同高處的截面一圓的面積比爲$\frac{\pi}{4}$。自然，這立體應是一個中心對稱且過對稱中心的橫截面積爲最大，而向上向下的截面積逐漸縮小的立體。劉徽根據漢代張衡將球體積放在外切圓柱及外切正方體中考察的啓示，便悟到這立方體應是內切於正方體的兩個直交圓柱的所圍部分，即"牟合方蓋"。這是一個了不起的成就，反映了劉徽的思想方法已經擺脫了經驗束縛而進入了理性階段，而且選擇了一條辯證法的思維方式。

拉普拉斯說過："認識一位巨人的研究方法，對於科學進步並不比發現本身更少作用。"認真探索數學治學傳統與思想方法，古爲今用，將會有所得益。

在數學學習上，趙爽主張"累思"，他說："累，重也。若誠能重累思之，則達至微之理。"劉徽說："事類相推各有攸歸，故枝條雖分而同本幹者，知發其一端而已。"這是鑽研數學的至理名言！提出："知累通達"，"取其會通"，特別重視："會通"即融會貫通。李冶則說："學有三，積之之多，不若取之之精；取之之精，不若得之之深。"表達了他對自學過程中積累學問，去蕪存精，思維加工成爲真知灼見的理解。

中國傳統數學注重數形結合。劉徽注釋《九章算術》的辦法是"析理以辭，解體用圖"，明確提出邏輯推理與直觀推理結合起來，這無疑是非常精明恰當！趙爽注釋《周髀算經》說"依徑爲圖，以披露堂室之奧"，用"勾股圓方圖"證明勾股定理。楊輝在《詳解九章算法》中說"凡題法解白不明者，別圖而驗之。"其插圖質量高，有創造性。朱世杰《四元玉鑒》卷首有四元自乘圖解，使人一目了然。這種數與形的結合，對發展數學理論和應用都是至關重要的，對今天的數學學習仍有重要的作用。

二、德育價值

數學史的教育性，首先體現在教學過程中挖掘數學史料中的德育因素，分析數學史在形成和發展學生的科學世界觀，道德色彩和個性特徵方面所具有的教育作用與意義。其價值主要體現於以下幾個方面：

1. 培養辯證唯物主義觀點，形成科學世界觀

數學本身充滿着唯物辯證法，在數學的發生與發展過程中、概念的形成和演變，重要思想方法的確立與發展，重大理論的創立與沿革，等等，無不體現唯物辯證法的核心思想：發展、運動與變化；是觀念與存在，歷史與邏輯的辯證統一。在某種意義上來說，一部數學史就是一部唯物辯證法與形而上學的斗爭史。數學對象源於客觀物質世界，說明了認識論的唯物論，體現存在決定意識的觀點。縱觀中國數學史，它來源於生產實踐，形成理論後又指導實踐的特點是極爲明顯的，等等，都是對學生進行辯證唯物主義教育的活教材，對形成學生科學世界觀有極大的作用。

2. 培養愛國主義思想,激發民族自豪感

數學史料是能提高民族自信心的良好素材。在教學中參考民族數學史,有助於培養愛國主義思想,有助於建立一種自豪感和對數學的"擁有感",激發民族自豪感和自信心,並把本學科和歷史與民族傳統聯係起來。

中國是世界文明古國之一,對人類作出過巨大的貢獻。打開世界數學發展的史册,可以看到我國古代數學研究的累累碩果,象晶瑩的明珠,閃爍着真理和智慧光輝,不僅在時間上遥遥領先,而且質量出奇制勝。"事實嚴峻地説明:中國數學是世界數學發展之樹不可缺少的一枝","我們可以開出一張很長的表來表彰我國先哲的成就,有些成果舉世公認,長期領先","由於中國封建社會特别長,以致不能獨立而完整的進入變量數學時期,但是初等數學各個高峰大多以自己獨創的方式順利領先越過"。

公元前二世紀,中國數學家發明了機械化算法體系與公元前三世紀希臘數學家創立的公理化演繹體系成爲世界數學的兩大支柱,東方數學典籍《九章算術》與歐幾里德《幾何原本》遥遥相對,東 西輝映。《九章算術》在世界數學史上第一次提出正負數的概念及算籌表示形式,正確提出正負數的運算法則,使得中國數學早在西方之前一千多年就能對正負數的運算運用自如。劉徽發明的小數十進位值制與荷蘭斯臺文的十進制小數早出一千二三百年。劉徽首創"割圓術",科學地得出徽率3.14,祖冲之發展劉徽的思想,對圓周率 π,得出兩項領先世界千年的傑出成果:① $3.1415926 < \pi < 3.1415927$;② (約率)$\pi = 22/7$,(密率)$\pi = 355/113$。

到宋元時期,中國數學大放異彩,沈括及其"隙積術"、"會圓術";秦九韶及其"大衍求一術"、"正負開方術";李冶及其"勾股容圓術"、"天元術";楊輝及其三角陣;朱世傑及其"四元術"、"垛積招差術"等傑出數學家及成就,把中國的籌算數學發展到頂峰。其中秦九韶的巨著《數書九章》中的"大衍求一術"和高次方程的數值解法在世界數學史上更有其重要的地位,前者稱爲"中國剩余定理",後者比西方"霍纳法"要早出五百多年。著名科學史家薩頓稱贊秦九韶是"他那個民族,他那個時代,並且也是所有時代最偉大的數學家之一。"康托則驚嘆,發現大衍求一術的人是"最幸運的天才"。

中國數學史上的卓越成就與光輝形象,將使人們受到巨大的鼓舞,激起民族自豪感,產生深厚而純真的愛國主義思想情感。

3. 激發學習激情,陶冶人的品質

古今中外數學家對事業志堅如磐,鍥而不舍;治學勤奮刻苦,嚴謹認真;品德剛正不阿,誨人不倦。劉徽不盲推古人,善於發現,學術問題實事求是,其傑作《九章算術注》、《海島算經》是我國最可寶貴的數學遺產;祖冲之"專攻數術,搜煉古今"和"親量圭尺,躬察儀漏,目盡毫釐,心窮籌算"的勤奮實踐精神和一絲不苟的治學態度及改革舊曆法表現出來敢於堅持真理的大無畏英雄氣概,留給後人一份極可貴的精神財富。秦九韶"九韶愚陋,不閑於藝","窮年致志",甚至連做夢都在思考數學問 題,寫出二十萬字的《數書九章》這部鴻篇巨著。李冶辭官不受,長期隱居,潜心學術,其《測圓海鏡》、《益古演段》流傳至今,成爲宋元時期數學的一項寶貴遺產。徐光啓爲改變中華民族積貧積弱的局面,孜孜不倦奮斗一生,勤奮刻苦,極端認真和無私奉獻的精神,令人肅然起敬!梅文鼎自學成才,積60餘年努力,著書70餘種,手抄殘篇散帖不下數萬卷,其弟弟、兒孫多人研究數學都有成就,堪媲於同時代的瑞士約翰·貝努里家族。李善蘭自幼熱愛數學,十歲讀《九章算術》,做到無師自通,十五歲讀《幾何原本》前六卷能盡解其意;其成就集中表現在垛積術、尖錐術、數根術,創造了傳統數學研究的新水平;他勤奮研究,雖老不輟,直至去世,這種老而不衰的學習工作精神,實在令人欽

佩和效法。華羅庚未受過正規教育，可才華橫溢，真是一個奇才；陳景潤的"1＋2"轟動世界，被譽爲"陳氏定理"。一位美國數學家贊譽說："你移動了群山"，是多麼值得珍惜的詩句啊！

數學史上中外優秀數學家浩如烟海，燦若群星，他們貢獻卓著，品德高尚，事迹動人。怎能不深深打動人們的心靈，怎能不激勵人們發奮學習，繼承和發揚這些優秀品質？進而激發爲數學拼博的豪情，砥礪爲數學獻身的志向。

三、美育價值

美是人類創造性活動的產物，是文明的產物。數學中是否包含美的因素？數學發展是否受美學方法的指導？答案是顯然的。數學世界充滿着美，"哪裡有數，哪裡就有美"，數學是一門既真又美的科學。正如英國數學家、哲學家羅素所說"數學，不但擁有真理，而且具有至高的美，是一種冷而嚴肅的美，這種美不是投合我們天性的微弱方面，這種美沒有繪畫或音樂那些華麗的裝飾，它可以純凈到崇高的地步，能够達到嚴格的只有偉大的藝術纔能顯示的那種完善的境地。"偉大的法國數學家龐加萊說"數學家們非常重視他們的方法和理論是否優美，這並不是華而不實的作風。那麼，到底是甚麼使我們感到一個解答、一個證明優美呢？那就是各個部分之間的和諧、對稱、恰到好處的平衡。一句話，那就是井然有序，統一協調，從而使我們對整體以及細節都能有清楚的認識和理解，這正是產生偉大成果的地方"。數學家在創造數學理論的過程中，常因自己發現了客觀世界本身具有精美結構而引起美的感受、沖動，激起進行創造性勞動的巨大力量。而當他們的著作被人讀懂時，讀懂的人不僅從中獲得數學知識，而且同時激起美的情感，這就是數學知識和數學美所具有的美學上的意義和價值。

數學美在早期數學中就產生了萌芽。古希臘的畢達哥拉斯學派首次提出"美是和諧與比例的合度"的觀點，最早試圖根據數與數的比例論述美及美的形式，認爲美與事物形式所表現出來的均衡、對稱、和諧、多樣統一分不開。歐幾里德是數學演繹美與嚴謹美的鼻祖，他的《幾何原本》可說是數學著作中的美學典範。他把豐富多彩的幾何知識按公理系統方式妥切安排，使得反映多種幾何事實的公理、定理都能用論證串聯起來，組成一個井井有條的統一的有機整體，猶如一座富麗堂皇的宮殿，雄偉壯觀，瑰麗多姿！給人以多樣統一的形態美的享受。

在中國古典數學時期，數學已表現出外層次的形態美。如早期的算籌就是一種美麗的原始計算工具，體現整齊與和諧之美。在中國數學中不乏自覺地按審美標準進行思維活動的例子。如劉徽爲求球體積設想牟合方蓋；楊輝撰《續古摘奇算法》將漢人發明的三階縱橫圖逐階推廣到十階的縱橫圖式；賈憲創"開方作法本源"圖，繼而被朱世傑加以拓廣；元代在天元術基礎上提出將天地人物上下左右排列的四元術，其中朱世傑《四元玉鑒》中的"兩儀會轍"、"左右逢元"、"三才變通"、"四象朝元"等分門別類法亦頗具美感，等等。

十七世紀在數學史上更是引人注目，微積分的問世，宣告數學進入現代數學。這個時期，經典數學達到形態美的高峰，進而向內層次的數學結構美、數學邏輯美等內在美的方向發展。進入二十世紀以來，數學美學思想產生質的飛躍，數學家們不僅承認數學美，而且認爲數學美感與數學審美能力是數學思維的內驅力，是數學創造性思維的一個重要組成部分。英國數學家哈代說"數學家造型與畫家或詩人的造型一樣，必須美；概念也象色彩或語言一樣，必須和諧一致。美是首要的標準，不美的數學在世界上是找不到永久容身之地的。"例如公式 $e^{i\pi}+1=0$ 是美的典範，現代數學中最重要的一些符號：1、0、i、π、e 被歐拉神奇地結合在一起，極其簡單，極其和諧，真是巧奪天工、出神入化；歐拉公式 $F+V-E=2$，簡單而統一的規律令人激動；方程 $\rho=ep/(1-e\cos\theta)$ 的建立過程使

人賞心悦目，驚嘆不已，等等。

幾千年來，一代又一代的數學大師們對數學美不懈的追求，努力使數學大廈日臻完善。數學的發展"就象精彩的故事一樣，波瀾起伏，扣人心弦，既在情理之中，又在意料之外，是和諧與奇異的統一體"。數學教學中，應充分挖掘數學史料中數學美的魅力，把抽象的數學理論美的特點充分展現在學生面前，滲透在學生心靈中，培養其審美能力，激發創造美的熱情，產生對科學的愛好和嚮往，形成高尚的情操和對真理的執着追求。

"數學是人類最高超的智力成就，也是人類心靈最獨特的創作。音樂能激發或撫慰情懷，繪畫能使人賞心悦目，詩歌能動人心弦，哲學能使人獲得智慧，科技能改善物質生活，但數學却能提供以上的一切。"(克萊因)目前我們中學師生未必能認識和體驗到這一點，因此，教師應在日常教學中滲透這種文化觀點和歷史眼光，循踪索迹，探微究隱，充分應用數學原始文獻或第二手資料、史實羅列或研究成果、數學評述或數學故事及數學家傳記等在中學數學中的體現，分析數學史在中學數學教育中的地位與作用，發揮數學史的教育功能，努力引導學生進入哲學思考和審美境界，讓學生通過事例欣賞數學的文化成分，增强學生的數學學識，激發學習激情，使其理解數學的本質、繼承、發展和掌握系統的科學思想及方法，提高數學素養。

參考文獻

1. 李銘心、汪德晉主編．中學數學中的數學史，海口：南海出版公司，1991
2. 周學海．論數學科學的教育價值。數學教育科學論文集(1988—1989)，天津：天津科技出版社，1990
3. 平辛倫．中國古代數學及其偉大成就，上海中學數學，1991(5,6)
4. 袁小明．論數學教育中歷史材料的應用，數學教育學報，1992(1)
5. 鄧宗琦主編．數學家辭典，武漢：湖北教育出版社，1990
6. 袁小明．數學思想史導論，南寧：廣西教育出版社，1991，153
7. 徐本順、殷啓正．數學中的美學方法，南京：江蘇教育出版社，1990
8. 蕭文强．誰需要數學史，數學通報，1987(4)

民族數學文化雛議

呂傳漢　張洪林
(貴州師範大學數學系,貴陽,550001)

民族數學文化,是在社會文化群落裡存在的特有的數學活動的結晶。它是民族文化的重要組成部分,與民族的文化相伴而生,相依而長。作爲一種文化現象,它與教育緊密相關。本文主要討論少數民族數學文化的概念及其與少數民族數學教育的關係,根據目前國內外的研究狀況談點粗淺的認識,以促進民族地區數學教育質量的提高。

1　數學——文化現象

關於"文化"的定義多種多樣,幾乎所有的定義都注意把文化與人類的活動及其結果聯係起來,承認文化獨立於各種遺傳素質和機體的生物特徵之外。但由於人們在理解文化概念時所指的重點各異,也就產生出不同的定義。在跨文化教育研究中,通常認爲"文化是一群人的生活方式,即所有的習得行爲(精神財富的總和),這些特定的行爲模式是通過語言和模仿一代一代傳承下來的"。它説明文化非本能和基因的直接產物,同時也認爲一種文化所反映的生活方式具有一定的穩定性[1]。

數學,作爲人類理性思維的精華,源遠流長,充滿人間。它和科學、文學、藝術、政治、宗教、哲學……等文化的各部門一樣,也是文化的一部分。數學作爲一種文化必然影響着人類的精神生活,它大大促進了人的思想解放,提高與豐富人類的整個精神水平。這是因爲數學文化具有其自身的特徵[2]:(1)它追求一種完全可靠的知識,(2)它不斷追求最簡單的,最深層次的,超出人類感官所能及的宇宙的根本,(3)它不僅研究宇宙的規律,而且也研究它自己。

數學,作爲人類文化的重要組成部分,它存在於全球的各個種族和民族之中,隨着日益頻繁的國際交往,起源於希臘的數學文化也相應地演變成全人類的數學文化,這反映了人類數學文化共性的一面.另一方面,由於不同民族的人群所處的地域、語言、習俗以及經濟環境的差異,也就形成了不同人群之間的數學文化的差異。特別是在多民族的社會裡更不應忽視這種文化差異。下面將側重分析存在於少數民族中的數學文化及其對數學教育的影響。

2　民族數學文化

2.1　甚麼叫民族數學文化?

數學教育的實踐證明,世界各國的兒童在剛踏進小學時就具有一些初級的數學思維和數學知識,這都是兒童入學前從他們接觸到的母語環境的外界經驗中得來的。這足以說明各個民族中,的確存在自己的數學文化,它是通過民族語言和模仿代代傳承下來的。正如國際著名數學教育家 A. G. Howson(英國)和 B. J. Wilson(美國)在《九十年代的中、小學數學》[3]中所指出的:"在所有社會文化群落裡存在大量的形形色色的工具,用於分類、排序、數量化、測量、比較、處理空間的定向、感知時間和計劃活動、邏輯推理、找出事件或對象之間的關係、推斷、考慮到各因素間的依賴關係和限制條件並利用現有設備去行動等等。雖然這些是數學活動,但工具却不是通常所用的明顯的數學工

具。但不管怎樣，它們構成了數學活動的基本成分。它們的發展無疑是中小學數學教學的主要目標。按明確規定的目標或意向來操作這些工具與其說是一種特定的實踐，倒不如說是可以認識的思維模式的結果。這種思維模式和系統實踐的綜合已經被稱爲有關文化群落的'民族數學'(ethnomathematics,D'Ambrosio,1985,1986)。兒童們剛來學校時所具有的數學知識中就包含了這種民族數學的因素"。因此，民族數學文化可以理解爲存在於民族文化群落裡的數學思維模式及其系統實踐的知識綜合。

2.2 民族數學文化的表現

按照不同發展水平，民族數學文化可以分爲如下幾部分：

(1) 非正規的數學文化。其特徵是普及性、滲透性及非規範性，一般存在於各種生產活動和日常生活中，是人們在各種社會活動中間接的、不自覺的使用的數學知識和參與的數學活動，所反映的數學思想和方法往往被具體情境所掩蓋，並且不一定具有一定的規範性和普遍的適用性。例如，象"總是"、"或"、"决不"等詞匯並不具備數學中的嚴格意義，一些數學技巧也離不開特定場合。盡管如此，由於這是人人都參與的數學文化活動並滲透到各種社會活動中，其作用不可低估。

下面這些內容可看作這一類數學文化：

計數(口頭數數、手指計數、計數系統、計數工具)、測量、民間歷法、度量、定位、建築及民間工藝品中的數學知識、數學游戲、棋類、計時……等等。

(2) 正規的數學文化。這是形成一定理論的數學文化，其特徵是學科性和實用性，在工農業生產中有着廣泛應用，如工程技術、經濟、建築設計、制圖等等。

與第一類相比，它是人們在長期的實踐中總結提高而形成的，並經過數學研究人員的系統研究和整理，形成精心組織的符號和概念系統。

中小學數學教育的主要內容就是這一水平的數學文化。

(3) 作爲科學研究的數學文化。這類數學文化的特徵是科學性和抽象性，這是數學家們所研究的數學，一般來說，這是各民族互相學習、相互吸收而形成的。有兩種情形：一種是以某些民族的數學文化爲主休，不斷吸收其他民族數學文化的精華來豐富自身，逐漸形成全球的數學文化。如希臘數學文化，不斷吸收其他民族數學文化的成就，特別是吸收了印度和巴比倫的數學成就來豐富自己，並傳到羅馬、傳遍歐洲和世界，直至今日仍在發揚光大；另一種是由於自然環境的隔離、社會隔離和心理隔離的影響，禁錮了民族數學文化的發展，使之長期停留在較低的水平和較狹小的地域環境之中，這種情况在發展中國家尤爲突出。在文化交往日益頻繁的今天，吸收、借鑒現代數學文化以發揚光大本民族數學文化是各民族發展民族數學文化的重要途徑之一。

從以上分析，第一類數學文化處於較低水平，但是人人都參與其中，在一定程度上反映了該民族的數學思維方式；第二類數學文化具有一定規範性(相對於第一類)，反映了現代社會對公民的數學素養的需求，是數學教育的主要內容，但應從第一類數學文化中吸取有益成分，建立通向第二類數學文化的橋梁；第三類數學文化是少數人從事的高級的數學文化活動，不是中小學數學教育的目標。

2.3 民族數學文化的意義

民族數學文化的意義不僅在於它是民族文化的重要組成部分，更主要的還在於它的現實作用和價值。正如 A. G. Howson 教授所指出的："不管是發達國家還是發展中國家的大多數人民，民族數學對於他們的一生的需要和應用是必不可少的。例如，衆所周知，當遇到日常生活中的一個算術

計算問題時，幾乎沒有人會用學校的標準算法。由於民族數學知識富有生氣的特點，在需要的時候，它就可以作爲發展進一步的知識的出發點，它是廣泛認可的教育目標'學會如何學習'的具體化。"[4]尼日利亞的數學教育家Sam Ale在ICME—6的大會發言中，描述了目前尼日利亞中的農村數學時指出："雖然那是種口頭的，不成文的和普通的適於直接解决實際問題的工具，但吸取這種具有農村特性的非常有意義的數學，可作爲建立未來授課的數學課程的基礎。"[5]可見，民族數學對於相應的民族而言，在現實的應用和兒童的智力開發中具有其重要的價值和作用。

2.4　民族數學文化的發掘

民族數學文化的發掘，與其說是弘揚民族文化，不如說是利用這富有生氣的，利用民族兒童思維的特有的數學文化來更好地開發兒童及青少年的智力，以促進人們面對全人類的數學文化奮起直追。

民族數學文化的發掘，是件十分有意義的工作，同時也是艱巨、復雜的工作。就我國而言，五十多個少數民族中特有的數學文化基本上没有進行系統的發掘工作。近幾年來，我們在貴州、四川部分地區開展的跨文化數學教育研究工作中，曾對水族、羌族、彝族、布依族等作過一些民間數學文化的考察工作，但這僅僅是開始，尚待全面、系統的深入考察。這項工作面廣、量大，較爲復雜，需要一批有志、有識之士，包括民族文化工作者、數學及數學教育工作者，民族地區有關人士聯合起來，共同投入民族數學文化的發掘，使各少數民族數學文化爲各民族的興旺發達發揮作用。

3　民族數學文化與數學教育

3.1　多文化環境中的數學教育

現今大多數國家都是多民族共存，不同的民族所具有的獨特文化自然構成多民族社會中的多文化環境，這種文化多樣性已是國際教育環境中的普遍現象。因此多文化社會中的數學教育，絶不能按照國家某一主體民族的單一文化的數學教育模式進行，必須在教育目標、課程設計、教材、教學方法、課堂結構等方面，都考慮到兒童的不同文化背景的需要。特别是在少數民族聚居地區的中小學數學教育中，更應注意引入民族數學文化來促進學校數學教育的發展。"然而在許多國家的小學教育裡，民族數學知識被大大地忽視了，這和語言教育呈尖鋭的對比。"[6]

事實上，民族數學文化引入中小學數學課堂，可以起到促進數學教育發展的作用，會産生下列積極的效果：

(1)　由於民族文化受到尊重，激發了兒童學習的自信心；

(2)　兒童借助於母語環境中的數學活動進行學習和思考，有利於學生的智力發展；

(3)　教師必須調查、了解學生的文化背景，利於結合民族兒童的實際因材施教；

(4)　教師必須做好專業上和心理上的準備，細心傾聽學生的意見，允許學生對所討論的問題提出自己的辦法，利於學生獨立思考能力的培養；

(5)　教師不能只是數學教本的忠實執行者，更要根據學生接受能力恰當地設計一些民族數學知識於教學過程中，促進學生的理解和掌握；

(6)　可以促進數學課程内容的改革，如從編寫富有民族特色的鄉土教材入手，形成具有民族數學特色的新課本和教學參考資料。

多文化環境中的數學教育，"在數學課堂裡可能存在激烈的文化冲突，這對於要取得令人滿意的效果對師生都是一種挑戰。"[7]在ICME—6會議上，許多國家(和地區)的學者都撰文討論了這一

問題。Raymond A. Zepp(澳門)指出對多文化環境中的數學教育必須換一種新的方式思考語言與數學的關係,並指出最近研究的一些新動向;Ina Kurch(德)的發言反映了用外語學習數學給兒童帶來的特殊問題並解釋了專爲這類兒童編制的課程的例子;Helen Watson(澳大利亞)討論了日常教學中面臨的這類問題,他們對語言與數學的關係有更深的理解,並考慮了雙文化環境下數學教育的令人困惑的問題;Norma C. Presmeg(南非)探討了數學教育可能保持文化的傳承方法[8]。

3.2 文化、信念、價值與數學教育

發展中國家對數學教育的討論越來越多的問題都集中到文化這一變量上。這可能是因爲東西方傳統文化激烈的變化與滲透使我們意識到文化這一變量的重要性。文化價值直接影響着數學教育,即使在困難的經濟狀況下,也會涌現出數學的天才人物,似乎就是文化環境熏陶的結果。這種文化影響的重要性的認識,也被美國密西根大學 H. W. Stevenson 等人的一系列跨文化研究所證實。他們比較了日本(Sendai)、中國臺灣(臺北)、美國(Minneapolis)的數學教育,對象是一年級和五年級學生。以前普遍認爲日本和中國學生數學成績明顯優於美國學生,這一研究又一次證實了這種看法,但與過去不同的是,產生差異的原因似乎歸根於文化、信念和價值觀的不同。這種差異表現在如下幾方面[9]:

(1) 信念　日本和中國的家長、教師、學生都把數學在教育中的地位看得很重,和語文閱讀具有同等地位,但在美國,數學的地位就不如語文閱讀。事實上,美國學生的家長們並不認爲他們的孩子的數學有甚麽問題,而在日本和中國,家長對孩子的數學學業是十分重視的。

在美國,學生數學成績好壞的原因歸根於天資,而在中國則主要歸於努力的程度和所花的時間。"笨鳥先飛"正好反映了中國人對數學文化的一種信念。正是由於這種信念,中國人正努力拼博。國際中學數學奧林匹克中國學生在近幾屆比賽中取得的優異成績表明中國在二十一世紀成爲名副其實的數學大國是大有希望的。

(2) 中國和日本重視數學教育還體現在時間分配比美國多。僅就中學數學授課時數言,占了總授課的 17%,居世界第一位。

(3) 中國和日本的教師在教學態度上都極力使全班學生跟上學習進度,減少掉隊學生。

(4) 社會和學校對教師的期望迫使亞洲的教師比美國教師花更多時間盡到自己的責任。測算表明,亞洲教師比美國教師花更多的時間於數學教學及相關的活動。

多文化教育涉及方方面面,它是生長在文化土壤上的一個有機體,而民族數學文化正是滋潤多文化數學教育的沃土。

3.3 民族語言與數學教育

語言與數學教育的關係是近年來各國所關注的問題。

Colette Laborde (法)在"語言與數學"一文中闡述了世界範圍內由各種教學環境所帶來的文化和社會差異,以及數學教學與學習過程中數學的某些領域(特別是代數)語言使用的規律,介紹了一項法、日之間的跨文化研究——從不同的角度探討語言、文化、數學教學之間的關係,用第二語言學習數學,使得少數民族兒童在解釋數學信息時產生困難[10]。

A. G. Howson 教授在《九十年代的中小學數學》中也指出:"在發展中國家,語言與數學教育問題是最明顯的。好些重要的問題都牽涉到使用甚麽語言作爲教育的媒介。在甚麽年齡這種教育媒介應由母語和本民族語言變爲比如說英語或法語?有證據表明若以數學理解能力爲依據,則至少在小學階段保留母語教學是有益的(Fafunwa,1975),而實際上,這在教育領域內很少採用,因爲會涉

及更尖銳的社會和政治問題。"

從某種意義上說，在復雜的多文化語言環境中接受教育對發展學生的數學理解能力是大有好處的，由於多民族地區文化背景的復雜性，爲了提高數學教與學的質量，作爲一種策略應當考慮科學地使用第一語言——母語工具。這並非意味着母語必定是數學教育的媒介，而是指它應保留它自己的權利和作用。根據我們近幾年來在貴州的一些民族地區開展跨文化數學教育研究的實踐證明，科學地使用雙(多)語於數學教學，的確有利於提高數學教學質量[11]。

3.4　民族文化與數學學習

兒童是作爲文化的承載者進入學校的，自然不同的文化背景對其數學學習就會產生不同的影響。Analucia D. Schliemann 和 Nadja M. Acioly (巴西)在 ICME—6 提供的資料表明，日常生活中的數學影響人們解決問題的方式並分析了數學問題中的數和算術運算如何影響尋求解答的效率和策略。Frederick Leung (香港)討論了可能影響數學學習的中國文化的四個特徵：尊敬長輩；記憶和實踐；漢語的特徵；望子成龍。

文化背景的差異在女孩子身上表現得較爲突出，尤其在民族地區更是這樣。但性別差異與數學學習成績，西方和非西方社會看法大不一樣：Gila Hanna(加拿大)根據 SIMS(第二次國際數學成績研究)的數據，考察了 20 個國家男女學生的數學成績，表明大多數國家 8 年級女生數學成績不比男生低，這種情況到 12 年級有了改變。但她比較了性別差異顯著和不顯著的國家女生的態度，得出了女生數學學業成就高或低的原因的有趣假設。然而 Frank J. Swetz(美國)從非西方社會的發現表明數學成績和學習態度是與文化和性別差異密切相關的(如馬來西亞的研究所報告的那樣)，這恰與西方的普遍看法成鮮明對比。

對於某些學生，學習數學具有特殊的困難。一般認爲他們的困難主要是心理上的，但也存在着不利的文化背景的影響。Nicolas C. Taylor(南非)報告了他通過 13 歲學生對約分、通分所使用的方法的個案研究得到的结果：多文化教育和民族數學的引入，是從文化的角度幫助"處境不利"的學生進入主動學習的輔助手段。

3.5　數學教師的自主權

在任何社會中教師都受到該社會的約束。在民族地區從事多文化教育的數學教師，不僅要遵循一般教育規律和原則，他還得熟悉少數民族數學文化，並遵循多文化教育的規律和原則，具有恰當地引入民族數學文化的自主權。當然，這裡存在着一個從民族數學向學校數學的轉化問題。爲此，必須訓練教師具備促進這種轉化的本領。關於如何轉化的問題，到目前爲止幾乎還沒有哪個國家做出實質性工作。

3.6　未來民族數學教育中的文化作用

民族數學文化既是統一的數學文化的一部分。同時也正向着統一的數學文化轉化之中。對民族數學教育的未來展望就是在這樣的條件下來探索的。

未來民族數學教育，既要扎根於民族文化的土壤，又要融合於世界統一的數學文化之中。繼承、發展民族的傳統數學文化並用之於民族數學教育之中，根本點在於利用民族文化的優勢更好地開發少數民族兒童的智力，培養少數民族的優秀人材。但又絶不能把我們的民族數學教育錮封於狹窄的民族數學文化的範圍。就以中華民族的數學文化爲例，盡管歷史上我們曾有過光輝燦爛的成就，但現在的影響和作用比之於世界性的數學文化，也就落後許多了。但中國人接受世界的現代數學文化還是很快的，短短一二百年間中國人中涌現了不少優秀的數學家。因此，我們的數學教育，必須科

學地應用這兩種數學文化培養優秀人材，特別是少數民族的優秀人材，弘揚民族數學文化，創造新的數學文化，自立於世界民族之林！

4　一些值得研究的課題

以上我們探討了民族數學文化與民族數學教育的關係，爲我們研究少數民族的數學教育提出了一種新的思路。縱覌數學教育的現狀，我們必須承認，數學教育成效是遠遠不能令人滿意的，對於邊遠少數民族地區尤爲突出，這與數學在義務教育中的重要地位，與當今國際數學教育的潮流"數學面向大衆"極不協調。實際上，這也是國際性的問題，A. J. Bishop (英)認爲[12]，種種問題都是由兩方面的原因引起的；第一，面對計算機及科技的發展數學教育的方向；第二，兒童所處家庭的文化背景與學校甚至社會的文化環境不一致，這些都與本文的中心問題——數學文化具有緊密的聯係。因此從文化的觀點來看待數學教育對於解決少數民族數學教育存在的種種問題是很有必要的，當然，這也帶來許多需要認真研究的理論和實際問題。

4.1　民族數學文化對數學教育的目的和價值的影響的研究

現代社會的發展對人的素質提出了新的要求，使得傳統的對數學的看法和數學教育的目的和目標受到了挑戰。過分强調了數學在應用上的價值(但數學教育中數學如何應用於實際並未處理好)，而未重視數學對人的塑造作用。學生往往是按教師的方法、技巧得出所要的答案(往往是唯一標準的答案)，立足於怎麼"做"，而未强調把數學作爲人類認識事物的一種方式，作爲一種文化現象來看待。在實際工作中，我們也發現，很多不同的看法往往也是由於對數學教育目的的不同認識所致，這是一個具有指導性的理論課題，下面這些問題都是值得認真研究的：

(1)　數學文化與數學教育相互制約相互促進的關係；
(2)　現代社會對人的數學文化素養的需要；
(3)　數學教育目的如何客觀地反映多文化社會的特徵；
(4)　數學教育對數學文化素養的培養目標；
(5)　數學教育爲各民族兒童及青少年提供均等的機會；
(6)　當前數學教育中的"文化偏向"及其對策；
…………

4.2　民族數學文化研究

當前，少數民族學生從一入學就面臨"文化偏向"的問題，要改變這一狀況，最基礎的研究就是學生的民族數學文化背景。誠然，由於歷史的和地理的等原因，一些少數民族的數學文化處於較低水平，但任何一個民族都有自身的數學文化，這是數學教育的出發點，這是我們認識學生數學思維方式的依據，對於學校數學教育是必不可少的背景材料。

例如，可研究下列問題：

(1)　民族數學活動、數學知識調査(如計數方法、計數系統、民間曆法、棋類、算器、定位、度量、編織、刺綉、民族語言中的數學概念等)；
(2)　民族傳統數學文化與漢族數學文化的比較；
(3)　少數民族學生數學學習障礙的文化因素分析；
(4)　民族學生的數學思維特點；

…………

4.3 數學文化與數學課程研究

課程是教育研究的重要問題，從文化的觀點看待數學教育對課程必然帶來一系列問題，如：

(1) 數學課程在數學文化素養的培養過程中所起的作用；

(2) 數學課程如何呈現數學文化？數學課程如何反映多民族、多文化社會的特徵？

(3) 數學課程如何在處於較低水平的非正規數學文化與正規的數學文化之間取得平衡？

(4) 數學課程的多樣性研究；

(5) 評價數學課程的文化標準；

(6) 對於各文化群體有哪些共同的價值觀念、數學思想方法應反映在課程中作爲課程的主體內容？如何在低水平的傳統民族數學與正規的學校數學之間建立橋梁？對於不同的思維方式應取怎樣的態度（忽視？壓制？鼓勵？）

…………

4.4 數學教學過程研究

從文化的觀點看待數學教育，那麽數學教育過程也就是數學文化培養的過程，諸如：

(1) 數學教育過程的本質；

(2) 數學教育過程中教師、學生和課程等各要素之間的關係、地位和作用；

(3) 數學教育過程如何反映文化特徵和兒童心理特點；

(4) 數學教育過程的模式（如課堂教學模式）；

…………

此外，師資素質及其培訓，教學方法，少數民族兒童數學思維特點，社會文化傳統對數學教育的影響和制約也是需要研究的課題。例如，少數民族地區數學教師的素質應反映民族文化特點，具備少數民族文化、少數民族心理學等方面的知識，培養民族地區數學教師也應有其自身的特點。又例如，由於文化背景的差異，課堂教學中會出現許多教學法的難題，這也是需要加以研究的。

參考文獻

1. 呂傳漢、汪秉彝. 初論跨文化數學教育研究，《數學教育科學論文集》(1988—1989)，pp. 77—84，天津科學技術出版社，1990. 4.

2. 齊民友. 數學與文化，pp. 1—16. 長沙：湖南教育出版社，1991. 5.

3. 4. 6. A. G. Howson 著，丁爾陞、陳應樞譯. 九十年代的中小學數學. pp. 75—83. 上海：上海教育出版社，1990. 12

5. 7. 8. 9. 10. A. J. Bishop, P. Damorow, P. Gerdes, Ch. Keitel. Mathematics, Education and Society, Proceedings of ICNE—6, University of Southampton Press, U. K. 1988. 10. pp311—325.

11. 張洪林、陳應樞. 水族地區數學教學語言問題及其對策，《數學教育科學論文集》，(1990)pp. 96—101，天津科學技術出版社，1991. 6.

12. Alan J. Bishop. Mathematicsl Enculturation, Published by Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1988.

紀 念《算 法 統 宗》成 書 400 週 年

《算法統宗》之傳入日本

大竹茂雄
(日本 371 前橋市元總社町 122—4)

寫在前面的話

我於去年(1991)8月出席在安徽省黄山市召開的"戴震學術研究國際會議"時,朋友帶我參觀了半小時"程大位故居",故對程大位有了進一步的了解。大概是上次參觀帶來的"緣分"吧,今天能有機會在"記念《算法統宗》刊行400週年學術會議"上做報告,我倍感榮幸。但我對程大位及其《算法統宗》並没有做過專門的研究。在此,我僅就日本方面對《算法統宗》傳入日本之説的有關研究成果做了整理,向諸位做一匯報,並對匯報内容負責。

刊行於明代萬歷20年(1592)的《直指算法統宗》在17世紀初的20年代後半期傳入日本,其後對於日本的數學,特别是對於珠算在日本的傳播、發展起了很大作用,這一點是毋庸置疑的。這一事實可由初版於1627年(寬永4年)的吉田光由著作《塵劫記》的寬永8年版本的卷末自序得知。著者在序中寫道:"我偶有從師,得汝思程大位之書,並以此爲指南,且略有心得。"也就是説,吉田光由以汝思(程大位之字)的書,即《算法統宗》爲藍本而寫作了《塵劫記》一書。因此,至遲於1627年以前《算法統宗》就應傳到日本了。但是,是甚麼人於明代何年將此書從明朝傳入日本一事就不清楚了。關於這一問題,自19世紀後半葉(明治初年)以來數學史家們就有各種不同的説法。下面,對一些主要的觀點略作論述。

1、毛利重能赴朝帶回《算法統宗》説

關於日本數學史的最早著作是1896年(明治29年)出版,遠藤利貞所著《大日本數學史》中對《算法統宗》之傳入日本有如下記載:"…豐臣秀吉之家臣毛利勘兵衛重能,由明朝得《算法統宗》一書。"[1]關於其年代記載爲:"毛利重能……奉命赴明學習算學,但因重能身分低下,故遭明人冷遇。重能歸國後報告豐臣,豐臣秀吉乃任命重能爲出羽守官,命其再度赴明。但時值日朝正發生戰事,明朝政局動蕩,無法學習算學,故將汝思之書《算法統宗》携回日本。"[2]即是,當時日本的關白(輔佐天皇之官職,事實上的國王)豐臣秀吉之家臣毛利重能二度赴明朝學習算學,但均未學成,最初是因毛利身分低下遭冷遇,第二次是由於日本出兵朝鮮,鄰國發生戰亂而明朝政局不穩所致。但第二次赴明朝應該能帶回《算法統宗》的。日本出兵朝鮮半島是1592年(文禄元年)至1598年(慶長3年)之間的事,由上述觀點,《算法統宗》出版後不久即傳入日本了。

但是,《大日本數學史》著於1893年(自序),毛利重能渡明一説在當時還不能成爲定論。著者遠藤在上述引文之後寫道:"也有人認爲,毛利重能並不是豐臣秀吉之家臣,故無渡明之事。"若毛利重能赴明朝一事不是事實的話,則毛利帶回《算法統宗》之事亦不能成立。此處,毛利重能赴明朝一説的根據有問題,故引起争議。《大日本數學史》著者遠藤利貞(1915年=大正4年)去世後,三上義夫博士(1950年=昭和25年卒)將遠藤的補稿做了修訂,並於1918年(大正7年)以《日本數學史》再版發行。在再版本的序中,三上博士提出了"毛利赴明朝一説之由來?"的問題。其後,以三上博士爲

肯的學者對於毛利重能赴明朝之説提出如下見解。

由文部省於 1887 年刊行，國學者木神原芳野(1881 年，明治 14 年卒)編集的《文藝類篡》一書中，有與《大日本數學史》上述内容完全相同的記載。即由此可知，遠藤的記載是根據《文藝類篡》的内容而來。另外，毛利赴明朝之説在明治以前的 1824 年(文政 7 年)和算家白石長忠(1862 年，文久 2 年卒)所著《數學家人名志》(日本學士院藏)中也有記載。但是，這些書中有關毛利重能赴明朝之説均無確鑿根據，均不足爲信，故現在全被否定。

以上對毛利赴明朝之説做了較爲冗長的敘述是因爲以下事實的原故。三上義夫博士在《大日本數學史》一書出版 20 年後的 1914 年與美國數學史家史密斯(D. E. Smith)合著了《A History of Japanese Mathematics》(芝加哥)一書。書中對毛利赴明之説提出疑問。大概是因爲有"毛利携回《算法統宗》的記載，關於毛利赴明之説與毛利將《算法統宗》傳入日本之説，已爲國外(日本以外—譯者)數學史家所熟知，並在著作中引用。

例如，李儼在其著作中記載："而程大位之算法統宗(1592)，亦於斯役傳入日本焉。豊臣秀吉之臣毛利重能爲首傳算法統宗者"[3]。傅溥在所著《中國數學發展史》中也有同樣的記載[4]。另外，最近出版的梅榮照、李兆華校釋的《算法統宗校釋》(教育出版社)的卷首有"新編直指算法統宗一書的流傳(代序)"。文中有嚴敦傑 1986 年 9 月所寫之内容，但仍是李儼《中算史論叢》之内容的引用[5]。如此，若要消除一度廣爲流傳的"毛利赴明之説"的誤傳還需要時間。借此機會我想向日本以外的數學史學界通報一下關於毛利赴明之説無確鑿根據一事。

2、貿易商吉田素庵傳入説

三上義夫博士否定了《算法統宗》系毛利重能傳入日本之説後，代之以京都貿易商吉田素庵傳入説。三上博士 1941 年(昭和 16 年)在東京商工會議所做了題爲"我國文化史中的珠算"的講演，其中闡述了如下觀點："…毛利著作，刊行《割算書》，以天下算一割算的招牌授學生，其功績卓著。但傳入《算法統宗》一事則須認爲是素庵之功。此書之傳入日本，可以想象與素庵有着密切關係。……素庵既與外國進行貿易，同時也是著名的藏書家，並精通數學。他進行南洋貿易時就能很方便地帶回《算法統宗》[6]。"

由上述可知，三上博士的主張也是一個假説，並沒有明確的史料作根據。由下述之推斷，素庵傳入説被認爲比較合理。

吉田素庵(1632 年一寛永 9 年卒)生於京都的一個世代醫家。其祖父宗桂曾兩次赴明朝。第二次赴明朝作爲向皇帝世宗(嘉靖，1522 年—1566 年在位)獻藥的名醫而聞名(林屋辰三郎《角倉素庵》，朝日新聞社，1978 年)。因此，吉田家族與明朝保持關係已久。另外，吉田家族經營"土倉"(金融機構。建倉庫代爲保存金錢、物品的行業，故稱"土倉")家業、生活用品等發了家。成爲富豪的吉田家族就以商號"角倉"作爲家族姓氏了。自素庵的父輩開始(1590 年代)就以特許批準的外貿船"角倉號"與外國進行貿易。因此，"角倉號"與明進行過貿易。

又，如文首所述，《塵劫記》是以《算法統宗》爲藍本撰寫的。相傳其著者吉田光由(1598 年二慶長 3 年—1672 年＝寛文 12 年)也是吉田素庵的堂兄弟六子，荒木勛認爲"受教於吉田素庵，學習新安汝思之算法"[7]。由上述吉田家族狀況來看，可認爲，《算法統宗》"可能是在素庵時代由角倉號貿易船從中國帶回來的"(上述《塵劫記論文集》之序)。

但從數年前開始有人對吉田素庵傳入説提出疑問，而主張新的、基督教傳教士傳入説。

3、耶穌教教士傳入說

吉田光由在《塵劫記》的叙文中寫道:"我偶有從師,得汝思之書",其中,如上述"師"被認爲是指吉田素庵而言,但最近有人提出疑問即平山諦博士所説的:我對光由自叙"我偶有從師"一語進行了分析,我認爲"師"無疑是指斯皮諾拉而言。因爲毛利重能和吉田素庵都是與光由很接近的人,不能説對他們"偶有從師"。"偶有"即應爲"很少有"之意[8]故平山主張,光由從師學習汝思之書即《算法統宗》,應爲從師斯皮諾拉。斯皮諾拉(Carlo Spinola,1564 年—1622 年)是出生於意大利的基督教耶穌會傳教士。他於 1602 年(慶長 7 年)38 歲時來到日本傳教,在日本幕府發布禁教令後被捕,於 1622 年(元和 8 年)58 歲時被火刑處死,成爲以身殉教的悲劇人物。斯皮諾拉來日本以前曾從師克拉維斯(C. Clavius 1537 年—1612 年)學習數學,並當過數學教師[9]。自 16 世紀後半葉來日本的傳教士得知日本人對天文學和數學很感興趣,即作爲傳教活動的一環在天主教堂中配置地球儀和天文觀測器具等以介紹西方科學,並進行西方科學教育。據説斯皮諾拉在 1604 年(慶長 9 年)後的 7 年間在京都一帶進行傳教活動,並在京都的天主教堂内設置數學進習班教授數學和天文學(海老澤有道《南蠻學統研究》,創元社,1978 年)。

另外,平山博士在幾年前發表的論文"西洋對初期和算的影響"中對 17 世紀前半葉出版的初期和算書的内容做了研究,發現有被認爲是受西洋數學影響的算題。認爲這些和算書的著者與吉田素庵等人均在京都天主教堂的數學進習班從師斯皮諾拉學習過數學[10]。其後,平山博士在"關於吉田光由之墓"中有如下的論述:"程大位(1533—1606)的《算法統宗》於文禄二年(萬歷 21 年 1593)在新安出版。當時恰值在廣東省上陸,邊傳教邊北上的利瑪竇(1552—1610)在其出版後二年到達南京。利瑪竇也是天主教會派遣來的傳教士,熟悉日本的情况,肯定是他立刻將《算法統宗》送給長崎的學院(Collagio)。慶長 7 年(1602)7 月斯皮諾拉抵長崎,並立刻得到此書。並在路德利凱斯(ロドリゲス)的指導下埋頭於此書。"[11]

平山博士認爲,兩年後斯皮諾拉携《算法統宗》赴京都開設講習班教授西洋數學和《算法統宗》。

而且,在 7 年之後"慶長 16 年(1611)8 月幕府發布禁教令,斯皮諾拉終於要離開京都了。光由當時虚歲 14,由素庵帶到天主教堂,斯皮諾拉看到光由後即將希望全部寄托在他身上,並將摞起來足有 40 釐米厚的印刷精美的《算法統宗》作爲遺物贈送給光由。這不僅僅是我一個人的想像。

也就是説,平山博士認爲在《算法統宗》出版後不久即由 1595 年抵達南京的耶穌會傳教士利瑪竇將其送到日本了。

這一説法也没有確鑿的史料爲證。而且,這一利瑪竇傳來説是以吉田光由從師斯皮諾拉説爲根據的,而其前提又是初期的和算書受到斯皮諾拉影響之假説。故關於這一"平山假説"自然就要産生贊成和否定兩種觀點了。最近,有從珠算史立場對初期的和算書中加減乘除算法受到斯皮諾拉的影響,即受西洋數學影響之觀點提出反對意見的論文發表。

以上,是關於《算法統宗》傳入日本之諸説。曾作爲定論的觀點也再次引起争議,至此争論並没有結束,關於此問題的各種争論如上所述,而《算法統宗》對日本數學發展的影響是非常之大的,對此問題我也想談談自己的看法,但因時間關係而只好割愛了。非常感謝諸位聽我的報告,謝謝。

參考文獻

1.[日]遠藤利貞.大日本數學史,1896,35

2. 同上,54

3. 李儼．中算史論叢，臺灣商務印書館，354
4. 傅溥．中國數學發展史，1982 臺北：中央文物供應社，275
5. 嚴敦傑．算法統宗校釋序，載《算法統宗校釋》卷前，1990：合肥，安徽教育出版社。
6. [日]三上義夫．我國文化史中的珠算，文化史中的日本數學(日文)，1984，東京：恒星社，147
7. [日]荒木勛．光由和他的家族，1972，大阪：塵劫記論文集(大阪教育圖書)(日文)
8. 11. [日]平山　諦．關於吉田光由之墓，月刊·珠算界，No. 439(1991 年 3 月)，(日文)
9. [日]宮崎賢太郎譯．卡路洛·斯皮諾拉傳，1985，天主教文化教令(日文)，15—16
10. [日]平山　諦．和算初期所受西洋的影響，富士論叢 32：1(1987)，富士短大(日文)

附：《算法統宗》傳入日本及關係年表

歷史的事項	毛利重能傳來説	吉田素庵輸入説	傳教士傳來説
1592 《算法統宗》刊 日本出兵朝鮮半島 1598 同上撤退 豐臣秀吉歿 1603 德川家康開幕府 1606 程大位歿 1611 幕府禁教令 1616 德川家康歿 1636 幕府鎖國令	毛利重能 2 回渡明 《算法統宗》傳來 1622 毛利重能 《割算書》刊	1598 吉田光由生 1603 素庵父安南國留始 1611 素庵安南國留易嗣 《算法統宗》輸入 1618 素庵引退 1627 光由《塵劫記》再版 (1632) 1632 素庵歿 1672 吉田光由歿	1518 利瑪竇入明 1595 利瑪竇到南京， 送給日本《算法統宗》 1602 Spinola 來日 1604 Spinola 停留在京都 數學 acodimm 1611 贈給吉田光由 《算法統宗》 1622 Spinula 殉教

（原文爲日文，邪日蘇譯，李迪校）

論《算法統宗》的資料來源

郭世榮

（內蒙古師範大學科學史研究所）

整整四百年前，程大位首次出版了他的傑作《算法統宗》，把明代數學推向了高潮，這無疑是中國數學史和珠算史上的重大事件。《算法統宗》是明代數學中的代表作，它一問世，就受到了人們的重視，吸引了大批讀者，產生了巨大影響。在西方初等數學知識大量傳入中國之後，它的影響仍然沒有減小。在明清兩朝，該書被反復傳刻和改編，到清初已成爲家喻户曉的教科書。如康熙間程世綏在《算法統宗》序中所說：該書"風行寓内，近今蓋已百有數十餘年。海内握算持籌之士，莫不家藏一編，若業制舉者之於四子書、五經義，翕然奉以爲宗。"其實，它的影響不止於國內，日本等國也因引進該書而得益良多。

《算法統宗》在歷史上的作用、影響和地位，以及它的內容和作者的情況，受到了數學史和珠算史學者較大的重視和關注，已有幾十篇專門的論文和一些論著出版。但是，還有不少問題值得進一步研究。《算法統宗》的資料來源問題即是其中之一。過去對它的論述不多，梅榮照和李兆華合著的《〈算法統宗〉校釋》[1]在這方面下了很大功夫，取得了很大的成績。該書指出了《算法統宗》中不少算題和算法的出處，這是他們的重大貢獻。但由於校釋體例的限制，未能展開論述，很難給人形成一個整體的印象。另外，李兆華把《算法統宗》與《田畝比類乘除捷法》、《續古摘奇算法》、《勾股算術》、《弧矢算術》中的一些題目作了比較[2]。鑒於《算法統宗》的資料來源問題對於研究程大位對傳統數學的繼承和發展等許多問題都有重要意義，本文擬對此做進一步的研究。

一

《算法統宗》是程大位的精心之作，是他在研讀了大量數學典籍，多方求師訪友，廣泛收集史料的基礎之上編寫完成的，是他幾十年研究數學的心得和體會。

程大位在收集資料方面花費了很大的精力。《算法統宗》的各家序言中都談到了這點。程際明在序中說："余族子賓渠程大位氏，幼負穎敏，綜涉墳籍……凡客游湖海，遇古奇字文及算類諸書，輒購而玩之。"程巨源也說："宗人汝思……周游吴楚之墟，遇方田、粟米、差分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股諸書，輒厚購得之……"他總是"不惜重貲，以購求遺書"。

程氏在"書直指算法統宗後"中回顧了自己研究數學和撰寫《算法統宗》的經過："予幼耽習是學，弱冠商游吴楚，遍訪明師，繹其文義，審其成法，遂於是學參會諸家之法，附以一得之愚，纂集成編。"他自幼喜好數學，在長江中下游經商過程中，聽說有"通數學者，輒造請問難，孜孜不倦"，向他們求教學習，積累了豐富的經驗和數學知識，最後在"參會諸家之法"的基礎上，加入自己的成果，寫成《算法統宗》。他自己認爲做到了"諸凡前法之未發者明之，未備者補之，繁蕪者删之，疏略者詳之，而又爲之訂其訛謬，別其序次，清其句讀。"因而是對前人工作的全面整理和進一步提高。無疑，就明代來說，這是一部集大成之作，繼承了前人的成就，提出了自己的見解。正因爲如此，程氏對它頗有信心，以"統宗"命名，意欲立明代算學之宗。他自稱"豈敢曰立我明一代算學之宗，聊以啓後學之成式而已"，反映了他的心態。程際明也把它稱爲"一代算學之宗"。實際上，該書在明代確實是首屈一

指的。

在編纂《算法統宗》的過程中，程氏參考了大量的古今數學著作，這是他能够參會諸家的基礎。《算法統宗》末附有"算經源統"一篇，分爲三類：一是"宋元豐七年刊十書入秘書省，又刻於汀州學校"，即《算經十書》(缺《綴術》，多《數術記遺》)；二是"元豐、紹興、淳熙以來刊刻者"，共 18 種，都是程氏"見聞者"，現已全部散佚；三是"嘉(景)定、咸淳、德祐等年又刊各書"，計 23 種，除楊輝的四種書外，均爲元明時作品，程大位注明了這些書的作者、時間等情況。按照程氏的分類，第二類爲楊輝以前的書籍，程氏未必全部見過，可能只讀到了其中少數幾種。例如，《議古根源》一書，他就没有見過，他所引録此書的内容不超出楊輝著作引録的範圍。這些書名主要是從其它書中看到的，真正親眼目睹的不多。第三類中絶大數應是程氏見到的，是他的主要參考書。現將此類書列出：

《詳明算法》（安止齋、何平子）
《九章通明算法》（劉仕隆，1424）
《指明算法》（夏源澤，1439）
《九章比類算法大全》（吳敬，1450）
《算學通衍》（劉洪，1427）
《九章詳注算法》（許榮，1478）
《九章詳明算法》（余進，1483）
《啓蒙發明算法》（鄭高升，1526）
《馬傑改正算法》（馬傑，1538）
《勾股算術》（顧應祥，1533）
《正明算法》（張爵，1539）
《算理明解》（陳必智，1540）
《重明算法》
《訂正算法》（林高，1540）
《測圓海鏡》（疑非李冶原作[1]）
《弧矢算術》（顧應祥，1552）
《算林拔萃》（楊溥，1572）
《一鴻算法》（余楷，1584）
《庸章算法》（朱光浚，1588）

《算法統宗》正文中也提到了十餘種算書，除了以上提到的還有《望斗真經》。以上應是《算法統宗》的直接參考書。此外，還有一些書和《算法統宗》有間接關係，如《謝察微算經》、《通源算法》、《算法全能集》、《盤珠算法》、《數學通軌》等等。這些書不見於"算經源流"，但它們比《算法統宗》早，有些内容也在該書中出現。

二

《算法統宗》共十七卷，可以分爲四個部分。第一部分包括"首篇"及卷一、卷二，是全書的預備知識，核心内容是珠算的基本技能和技巧、算術基本運算法則、名詞解釋、大小數記法、度量衡制度，以及數學的起源，等等。第二部分由卷三到卷十二組成，按"九章"的體例編排，其中"少廣章"分爲兩卷。這一部分是全書的核心。第三部分由卷十三到卷十七組成。卷十三至卷十六爲"難題"，卷十七爲"雜法"。第四部分爲附録，即"算經源流"。上述内容有不少來自前人的著作，清代的學者已注意到了這一點。

歸納起來，《算法統宗》的資料有三個主要的來源。現在分别討論如下：

(一)是程大位在商業活動和其它實踐中所獲得的經驗性資料。已查明的主要有：關於丈量田地的各種經驗和實例。反映在數學上就是關於面積的理論。《算法統宗》卷三方田章一開始便寫到："按田之形狀甚多，具載難盡。學者不必執泥，在於臨場變變。必須截盈補虛，俾尖減大以合規式，但田中尖先取出方、直、勾股、圭、梭等形，另積旁餘，併而於一，然後用法乘除之，用少廣章開方等法還原，始爲精密之術焉"。在介紹各種田的計算方法之後，他再次指出，讀書應隨機應變，根據實際情況采用適當的計算方法。並舉例説明如遇田中有房基應如何計算；不可以周長大小來作爲衡量面積大小的依據。此其一。其二，卷三中的"休寧縣課則"所舉爲萬歷九年推行"一條鞭"法時實行土地丈量

的例子。作爲一個數學家,他對當時錯誤的作法提出了批評,"斛法論"即因此而做。其三,卷四中提出了校正斛法的簡易辦法:"直指曰:若校今時斛法,可將桌四張橫頭竪地以爲井字樣式,內用今尺橫直各量一尺,上下皆同四旁,用物擠住不動,將米一石傾放內中,米上以平爲度,却用尺量高若干,定爲斛法,除之,得積米之數也。"楊輝雖有類似方法,但程氏所述更爲簡便。這無疑是在實踐中總結出來的。其四,在論述斤兩互換時,程大位指出了他所遇到的各種錯誤作法,提示讀者注意。另外"丈量步車"也是一例。

(二)是程大位的發明和創造。以往的論著對此已有很多論述,如珠算開帶縱平方和帶縱立方,以及珠算的其他成就,制作"丈量步車"等等。

(三)是當時流傳的各種數學著作和民間口頭流傳的一些算題、算法和歌訣等數學內容。《算法統宗》引述或改編前人著作中的內容很多,難以一一列出。這裡僅作一概述。

1. 前兩卷的主要內容基本上全部來自以前的著作。卷一所述"先賢格言"、"算法提綱"、"九章名義"、"算學節要"、"用字凡例"、大小數記法、度量衡制度、比重表、珠算的基本口訣等等,都已在前人的著作中出現過。唯卷一末附加的"新增續編九歸歌釋義"應是新內容。"新增"二字正表明卷一的其它內容是原有的。卷二的內容也已見於以前的日用算書中。如該書的歌訣除"異乘同除"、"同乘異除"等兩三首之外,其餘均見於《詳明算法》,而且相差極小,多數只是個別用字不同而已。又"留頭乘"下注曰:"原有破頭乘、掉尾乘、隔位乘,總不如留頭乘之妙,故皆不錄。""求一乘除法"一條下注:"按:古有之。賓渠因考其法用倍折之繁難,不如歸除之簡易,故恩於此而廢之,使學者專心於乘除加減之法,而無它岐之惑也。"《詳明算法》中的"求一乘除"法被刪去了。這些都說明卷二是把原有資料編輯而成。當然,具體例題則不一定完全搬自它書。

2. 卷三至卷十二中直接或間接引錄了楊輝、安止齋和何平子、吳敬、馬傑、劉仕隆、顧應祥等人的著作以及《算經十書》和其它一些書中的內容。這部分中有不少文字表明某些內容是別處已有的:卷三中注文有"張邱建方求斜法"、"楊輝方求斜法";卷六"開方求廉率作法本源圖"下有"此圖吳氏《九章》內有平方至五乘方……";卷七"分田截積法"下面有注:"原載方田章,因與圭、梯等截積間隔,不便觀覽,今移此,以統於一";又弧矢題下有"原在難題少廣章中,無圖,今共圖之於此,便人目矣";等等。同時,可以辨明不少內容的出處,因數量較多,不一一列出。

3. "難題"和"雜法"大部分可以在以前的書中找到。大概有三種情況:一是錄自程氏所見到的書中,像金蟬脫殼、二字訣、寫算、一筆錦、縱橫圖、一掌金、孕推男女等即屬於此。二是出自《算經十書》、《議古根源》及其它古算書中,這是程氏從楊輝等人的書中間接得到的。三是載在《盤珠算法》、《數學通軌》和其它一些明代算書中,程氏未把這些書列入"算經源流"中,表明他是從另外的渠道得到的。

三

《算法統宗》代表了明代數學的最高成就,反映了當時數學發展的主流。因而,它的編寫體例、某些數學思想以及它所代表的數學研究方向等等也不是程大位所獨有的,與他同時代及其前後的數學家也或多或少持有同樣的觀點。本節我們打算探討《算法統宗》中某些內容的社會性問題,這也應算作廣義的資料來源問題。

《算法統宗》在數學思想上代表了當時一些非常流行的觀點。對數學的起源,程大位主張數學肇源於河圖、洛書。他在全書之首就强調了這一點,並聲明:"今推明直指算法,輒揭河圖洛書於首,見數有本原云"。把"河圖"、"洛書"及相關的內容放在首位。在"書直指算法統宗後"再次予以申論:

“蓋自虙戲宰世，龍馬負圖，而數學肇端”。同時，他也宣揚“隸首作數”、“伏羲畫卦”、“易生數學”以及關於度量衡起源於黃鍾等傳說。這些觀點在明代占有統治地位。把河圖洛書等與數學聯係在一些始於宋代，秦九韶首先在數學著作中加以宣揚，明代程朱理學風行，促進了這種觀點的發展。數學家如唐順之、顧應祥、嚴恭、黃龍吟等人都在自己的著作中持有上述觀點[3]。明代的一些珠算書還把珠算口訣稱爲“隸首上訣”等。

《算法統宗》採取以“九章”爲主的體例。書首冠以預備知識，然後按九章的順序編排，最後是“雜題”和附録。這種體例在明代也較流行。劉仕隆、吴敬、許榮、余進等人都給自己的書名加上“九章”二字，採用九章的體例。劉仕隆的書今已無存，但肯定是按九章順序編排的，書後附有“雜題”三十三款。余進的書也是採取劉氏之法。吴敬的《九章比類算法大全》共十卷，正文按九章分爲九卷，第十卷專論開方。還有一卷首，列舉大小數記法、度量衡制度、算術運算法則等內容。柯尚遷的《數學通軌》也採用了同樣的體例。程大位熟悉並推崇吴敬和劉仕隆的工作，《算法統宗》的體例受到了他們的影響是顯然的。

珠算是明代數學研究的主要方向。《算法統宗》在這方面取得了重大成就，可以説是明代珠算的最高代表。珠算著作在明代開始大量出現，在《算法統宗》以前已有不少。程大位以珠算作爲重點方向不是偶然的，他作爲一個商業家，不僅對它的重要性有深刻體會，而且有豐富的實踐經驗。

廣泛使用歌訣。《算法統宗》大量使用詩詞、歌訣進行命題和表述算法，這也是當時十分流行的。歌訣在宋代開始盛行，到明代已成風尚，幾乎所有的數學書籍都要涉及。這是數學大衆化的要求，也是當時商業發展的結果。由於詩詞歌訣易於記憶和傳播，受到普通大衆的歡迎和廣泛接受。因此有些歌訣能被長期口頭流傳下來。程大位在周游江湖二十餘年中廣泛接觸了各地區各階層的人士，視聽寬廣，有機會了解和收集各種歌訣，熟知百姓的喜好和要求。這是他廣泛使用歌訣的一個重要原因。

總之，《算法統宗》是時代的産物，在研究其資料來源時，不能忽視它的時代性。

四

本節簡要討論《算法統宗》與它的幾部主要參考書的關係，以便進一步説明其資料來原。

1. 楊輝的著作

“算經源流”所記楊輝的著作共有四種：《詳解黄帝九章》(即《詳解九章算法》)、《詳解日用算法》、《乘除通變本末》和《續古摘奇算法》，並有注曰：“以上具出楊輝《摘奇》內”。此注説明程氏只見到《摘奇》一書而未見其它。但《詳解九章算法》通過吴敬等人的著作間接影響了《算法統宗》則是無疑的，卷三到十二中有一些內容與此書有密切的關係。《摘奇》是《算法統宗》的主要參考書之一。書中的不少內容被引用。如《算法統宗》卷十七中的縱橫圖即是録自《摘奇》，只有個别圖的作法不同[4]。卷十二勾股章中的“海島”類問題及其論説本自《摘奇》。另外，程大位通過楊輝的著作了解了不少其它書的內容，如《九章算術》中的題目、《孫子算經》中的物不知數問題、度影量木問題，《張邱建算經》中的河上蕩杯問題，劉益的工作，等等。

2.《詳明算法》

“算經源流”注曰：“元儒安止齋、何平子作，有乘除而無九章，不備。”該書現有傳本，上下卷共114問。全書分爲因法、加法、乘法、九歸(法)、定身除、歸除、求一、商除、約分、異乘同除、就物抽分、差分、和合差分、端匹、斤秤、堆垛、盤量倉窖、丈量田畝、田畝細量、修築共20項，每項都有歌訣。這些歌訣幾乎全被《算法統宗》引録，分散在前八卷中。例外者只有三條：“求一”法被程氏删掉，因爲他

認爲無用。"因法歌"和"斤秤歌"程氏所用不同。另外《詳明算法》中的7個算題也被《算法統宗》採用[5]、方田章有3題，商功章有4題，似是所本。《詳明算法》還是程大位編寫《算法纂要》的主要參考書[6]。與《詳明算法》關係極爲密切的《算法全能集》[7]因此也和《算法統宗》有了間接的關係。

3.《九章通明算法》

"算經源流"記稱："永樂二十二年(1424)臨江劉仕隆作九章，而無乘除等法，後作難題三十三款。"該書現已不存。《算法統宗》卷十三首"難題附雜法序"中記載："夫難題昉於永樂四年。臨江劉仕隆公偕内閣諸君預修《大典》，退公之暇，編成難法附於《九章通明》之後。及錢塘吳信民《九章比類》及諸家算法中詩詞、歌括、口號總集名曰難題。"由此可知程大位對此類問題特別注意，《算法統宗》卷十三到十六中共集"難題"108題，其中應包括了劉氏的33個題。此外，《算法統宗》卷十盈不足章有"雙套盈不足"一項，並說："劉氏《通明》、吳氏《比類》始增雙套者，用分母子者，皆存於後，以便學者。"由於程氏未見《九章》，以爲"雙套"出於劉、吳二氏。不過，這正好道明了《算法統宗》這一問題的直接來源。

4.《九章比類算法大全》

此書是《算法統宗》最主要的參考書，吳敬著。它的體例和内容都被程氏所採用。可以説該書的全部重要内容都可在《算法統宗》中找到，從卷一的"先賢格言"到最後的"難題"都有。這裡難以一一列舉。

5.《馬傑改正算法》

該書成書於1538年，今已無存。馬傑爲河間吳橋人。他寫這書的目的是爲了"改正"吳敬《比類》的"錯誤"。"算經源流"認爲該書"只改吳信民法，反正爲邪數款"，並説"今予辨正，圖釋參校，免誤後學"。《算法統宗》有三處提到該書，都是爲了糾正其中的錯誤。卷三和卷十五討論了"錢田"，詳細列出了馬氏的解法，指出了他的誤改之處。又卷十六有"諸葛統兵"一問，系計算一以八爲公比的等比數列的若干項之和的問題，馬氏理解題意錯誤，因而計算錯誤。程氏予以訂正，並舉一利息問題以明其義。

6.《勾股算術》和《弧矢算術》

顧應祥的這兩種著作都有傳本。《算法統宗》卷十二中"勾股名義"和"勾股論説釋義"等内容均本諸於《勾股算術》，而卷三之"方圓論説"乃出自《弧矢算術》[8]。兩書中的個别題目也見於《算法統宗》。

另外，我們還想提一下《謝察微算經》。該書爲宋代作品，"算經源流"不載，現傳有《説郛》等版本。關於該書的内容最近有一篇專論[9]。《算法統宗》間接參考了該書。卷一的用字凡例、大數、小數、度、量、衡、畝等節的内容都已見於《謝察微算經》。其中用字凡例與後者的用字例義只差幾個語尾助詞"也"，另有二三字不同。《算法統宗》是從甚麼渠道了解到這些内容的？尚難下結論。

上述分析説明《算法統宗》的資料是通過多個渠道獲得的，它綜輯了各家的成果，是明代的集大成之作。關於它的資料來源問題，本文只是一個概述，還有許多工作需要做。

參考文獻

1、5. 梅榮照、李兆華.《算法統宗》校釋.合肥:安徽教育出版社,1990。

2、8. 李兆華.《算法統宗》試探.自然科學史研究 9:4(1990)。

3. 金　福．對明代數學思想的幾點分析．數學史研究文集(一)，呼和浩特：內蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，1990。
4. 户谷清一．《算法統宗》縱橫圖探討，新珠潮，4(1986)。
6. 李培業．《算法纂要》校釋，合肥：安徽教育出版社，1986。
7. 李儼．十三、十四世紀中國民間數學，北京：科學出版社，1957。
9. 李迪、馮立昇．謝察微算經試探，數學史研究文集(三)，呼和浩特：內蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，1992。

程大位《算法統宗》中的筆算

李培業
（陝西財政專科學校）

我國古代用籌進行計算，到宋元時代，需要記録籌算的演算過程，便產生了數碼。知識分子進行數學研究，用筆在紙上演算，常不用籌，這就自然地產生了籌算式的筆算。明代珠算代替籌算後，知識分子模擬珠算的演算過程，不去具體操作算盤，而在紙上書寫演算，“不用算盤數可知”，於是產生了珠算式的筆算。吳敬《九章算法比類大全》(1450)中的“寫算”和程大位《算法統宗》(1592)中的“一筆錦”，都是我國創造的獨特的筆算，在西洋筆算未傳入前，早就流行於我國。我們完全可以斷定，如果西洋筆算不傳入我國，我國也會自己創造出不同形式的筆算。這種筆算完全可以和珠算結合，可以説是一種“筆珠結合”的算法。在本文中我們根據《算法統宗》的記載，對上述兩種筆算加以介紹，並對“寫算”中的“鋪地錦”算法之由來，提出自己的看法，與數學史界同志，共同探討。

一、一筆錦

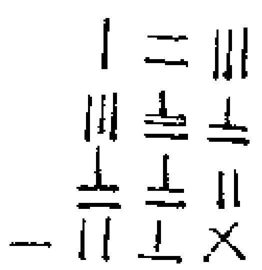
“一筆錦”就是將算盤上演算的過程，用筆直接記録下來，可説是珠算的筆録式。這種算法，在《算法統宗》以前的算書中未見記載。

“一筆錦”所用的數碼是明代創造的所謂“暗碼”。原書中說：“法曰：照算盤定位布列行數，用暗碼直下。但 丨 刂 丄 ≐ 可加一畫者加之。如 X ό ≟ 文 不能加者另碼。”在運算過程中用加碼和另書碼兩種方法處理，一切按算盤上格式進行[1]。

1、加法（堆積合總）

原例：123＋264＋385＋492

原書有簡化式如下：



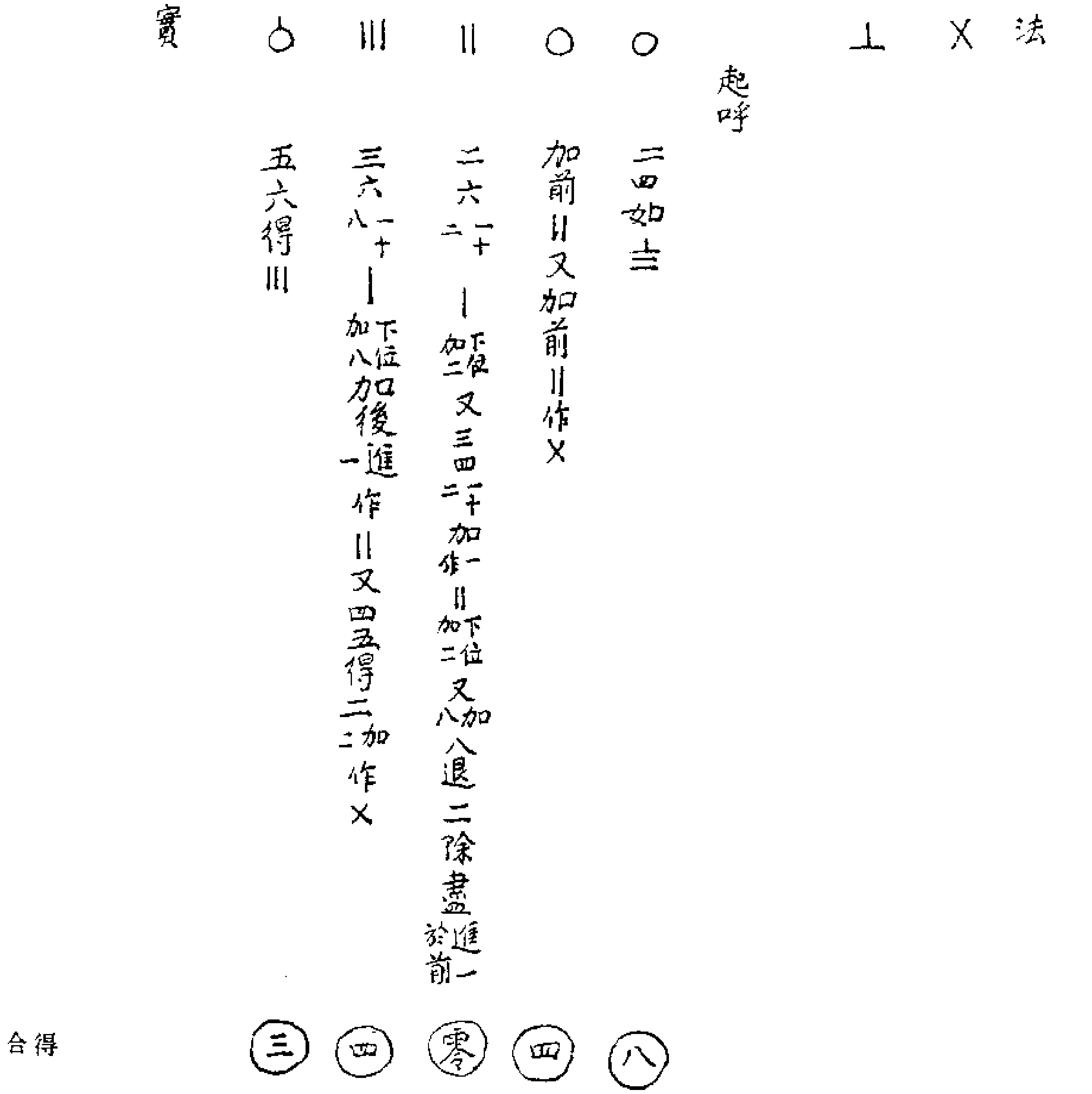
合得

中間兩行數，是連加過程中出現的數，最後一行是得數。一切按算盤上演算的方式進行，從高位加起，用加法口決。

2、乘法

原例：532×64

原草如下：



原草中的文字是爲了説明演算過程，實際演算時只寫數碼。若用阿拉伯數字寫出，原草即爲：

實　　5 3 2　　　　法 6 4

　　12⑧

　　19④

　　2⓪

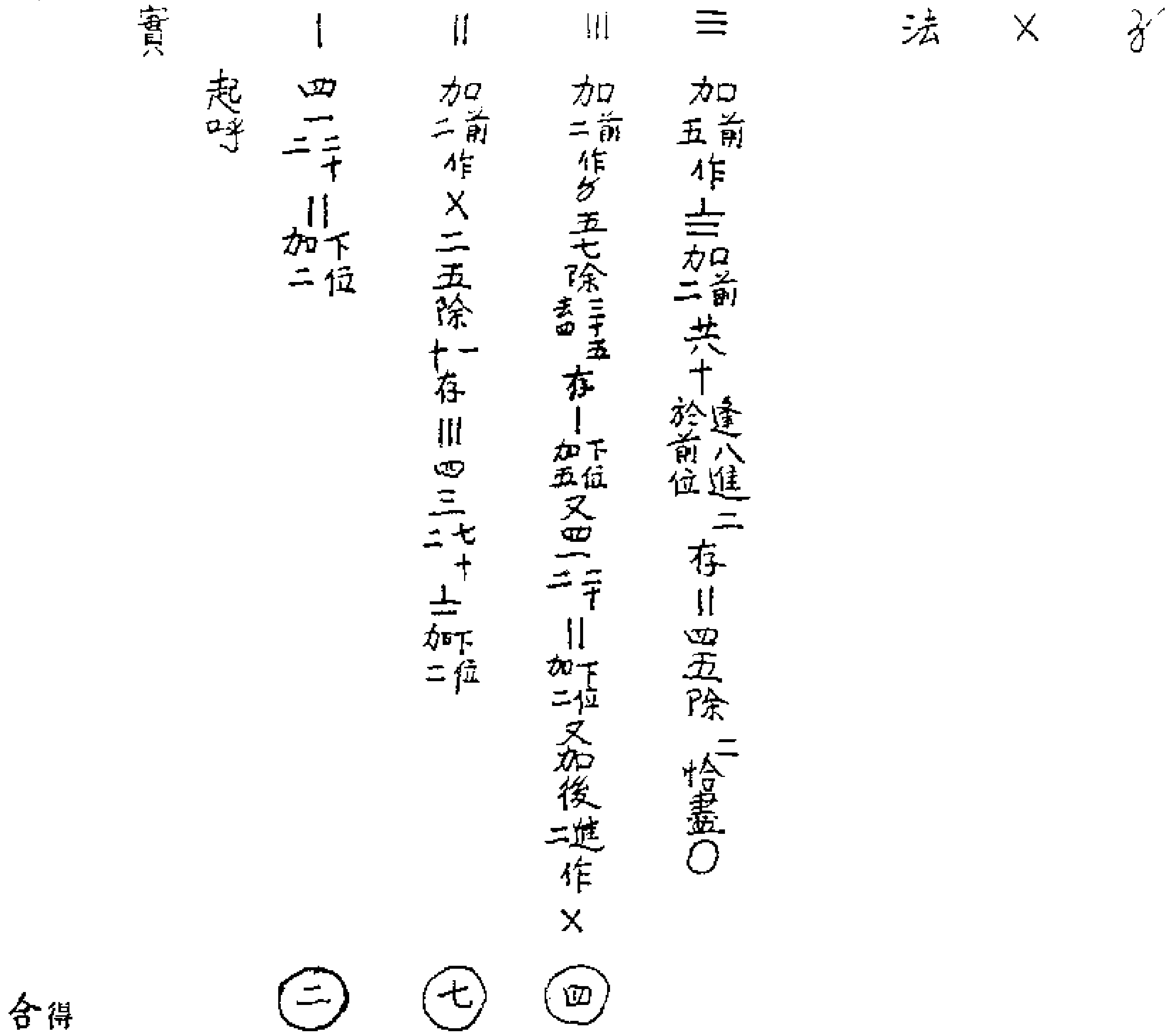
　③④

運算的次序是：二四得八，二六一十二；三四一十二，三六一十八；五四二十，五六三十。得數爲 34048（以圈爲記）。可以看出，這就是珠算留頭乘法的筆錄。

3、除法

原例：1233÷45＝27.4

原草如下（按：原書定位錯誤，今改正）



去掉說明文字，用阿拉伯數字，可記錄如下：

```
實        1 2 3 3              法 4 5
         ② 4
            3
          ⑦ 5
              2
              1 8
          2 1 0
              ④ 2
              0
```

運算次序是：四一二十二，二五除一十；四三七十二，五七除三十五；四一二十二，逢八進二，四五除二十。可以看出，這就是歸除法的筆錄。

二、寫算

"寫算"名稱，最早見於吳敬《九章詳注比類算法大全》，只有"寫乘"和"寫除"，未見"寫加"和"寫減"。程大位對"寫除"進行了改造，變得更加簡化[2]。

"寫算"是一種格子算，是在畫好的特定格子上進行演算的方法。

“寫乘”也叫“鋪地錦”，十三、十四世紀盛行於伊斯蘭國家，以後傳入歐洲，叫“格子乘法”。在很多的數學史著作中都作過介紹，再不贅述[3]。

“寫除”在吳敬書中是把“回”字格排成“九宮格”的方形，作爲除法圖式。(圖 1)程大位改爲直排。程大位說：“舊法……置九圖如河圖方攢，凡位有九位者少，常虛設其位者多。今變立歸除圖於右直排，不論幾位，皆可用也，而無虛設位矣”這樣的改造，是避免“虛設其位”。

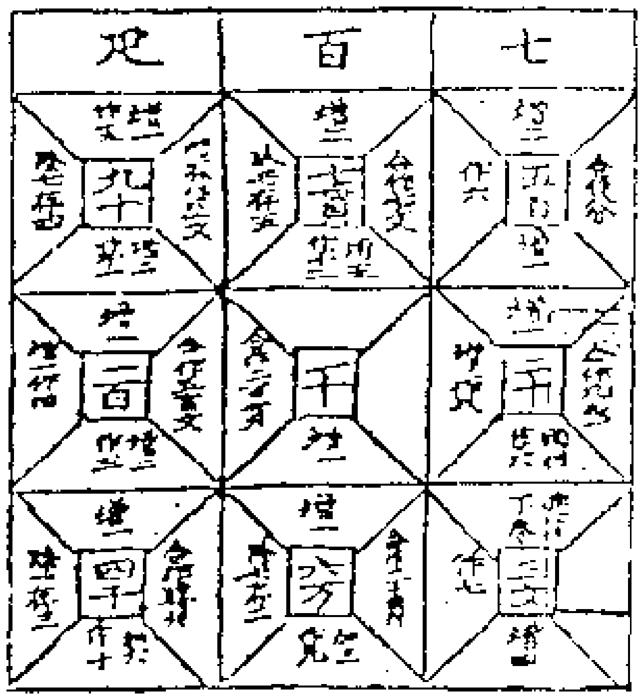


圖 1

現舉程大位原例，進行解釋。

“今有銀九十四兩五錢，買絹七十匹，問每匹價若干？”

先畫一圖式，由“回”字形方格直綫排列而成。中間方格內寫被除數，旁邊寫除數。每一“回”字格周圍寫運算過程中的數字，按順時針方向次序書寫(圖 2)。

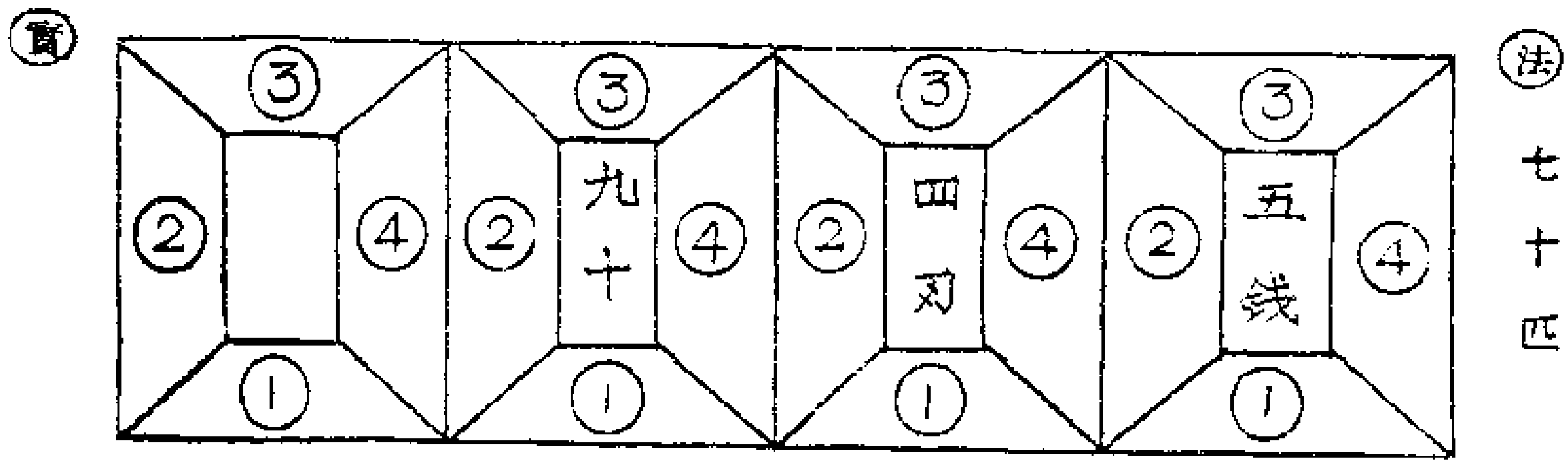


圖 2

然後進行運算，其過程如下：

①逢七進一：把余數寫在下百①格內，進數寫在前一位④格內；

②七二下加六：加得的數寫在下位①格內，得十。

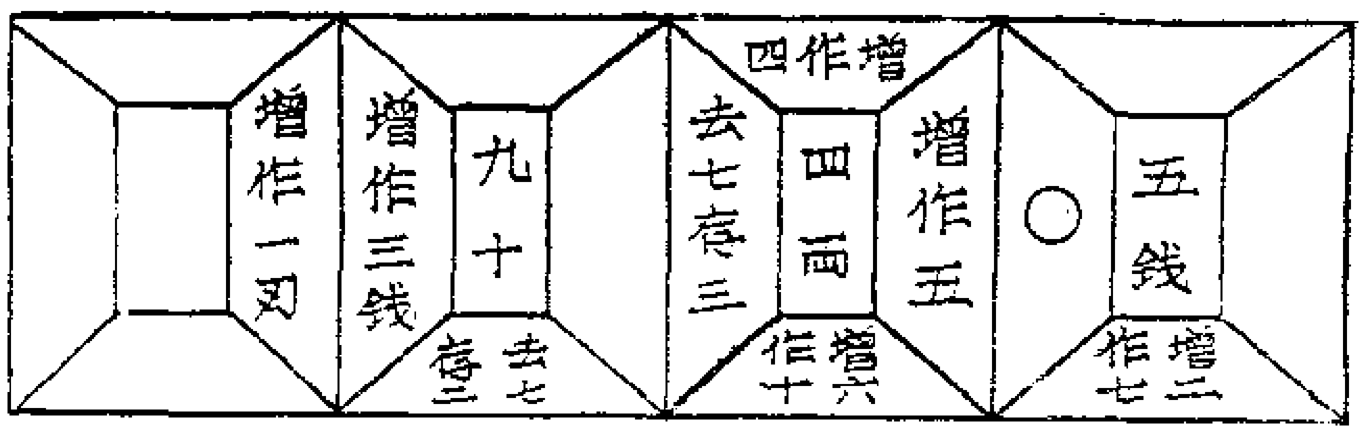


圖 3

③逢七進一：進一於前位，與①格內的二相加，得三，寫在②格內，本位去七存三，記於②格內；

④七三四十二：把本位②格內的三改爲四，寫在③格內，下位加二，作七，寫在①格內。

⑤逢七進一：本位去七，恰盡。前位加一爲五，記在④格內。

最後，得答案爲一兩三錢五分。原書圖式如圖 3。

原圖中的文字是爲了向讀者説明運算過程，具體演算時，只寫數字，不寫文字。若用阿拉伯數字記録，則可得如下簡圖（圖 4）。

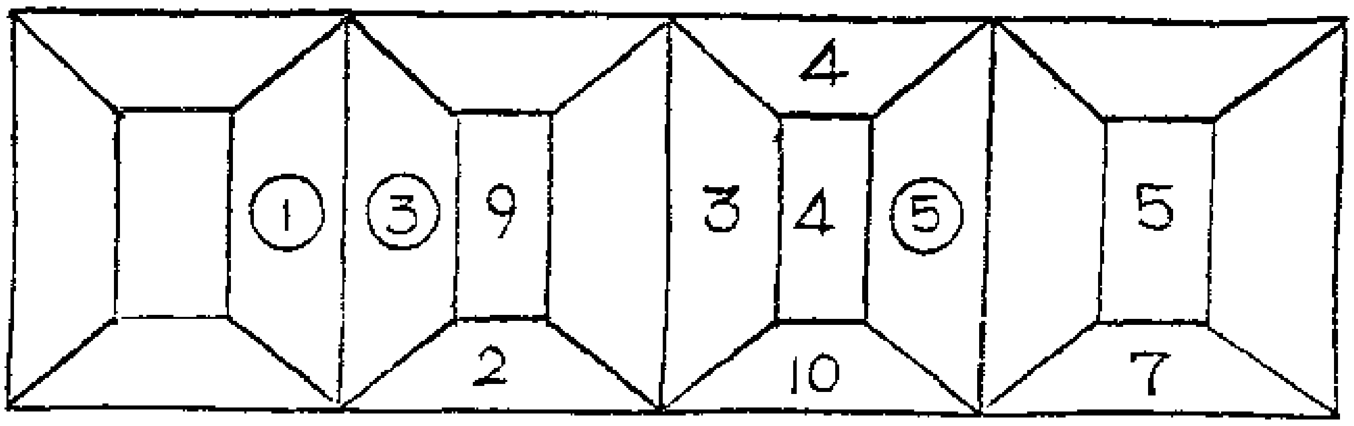


圖 4

我們看到，這是把歸除法在一種特定的圖式上進行演算，顯然是我國自己的發明創造。

三、"鋪地錦"探源

在很多的數學史著作中，都認爲"鋪地錦"由伊斯蘭國家傳入我國。理由是我國首載此種算法的吳敬《九章算法比類大全》（1450）比伊斯蘭國家記載此法的數學書爲遲。實際上比伊斯蘭國家更早的印度婆什迦羅（1114—1183）的《麗羅娃底》（1150）中已記載有所謂"格子乘法"[4]。而《麗羅娃底》一書中很多內容與中國古典數學書中內容多有相似之處[5]。我們不能輕易以時間前後來下結論，説某項數學問題是我國傳給印度或印度傳給我國。"鋪地錦"是否由伊斯蘭國家傳入，此問題應再作深入探討。我以爲"鋪地錦"爲我國所獨創，並非來自外國。有以下幾點理由：

1. 吳敬書中將"寫乘"與"寫除"放在一起，"寫除"是地地道道的中國除法，而"寫乘"却來自外國，於理不合。

2. 此法最早的名稱應爲"鋪地錦"（理由見後），出現"寫除"後，纔一併叫"寫算"。古代籌算時常在地上進行演算，宋元數學書中多見之。如《丁巨算法》、《算法全能集》等書中經常出現"置鈔在地"、"置都銀在地"、"置都谷在地"等。"鋪地錦"者，意即鋪滿地之錦也。因其源於籌算，故有此名。可知"鋪地錦"絶非譯名，是我國所自創，由此也説明他不是從外國傳入的。

3. 我們看到《麗羅瓦底》中的乘法是後乘法（從實尾乘起），和西洋筆算一致。而《盤珠算法》中的"鋪地錦"是前乘法（從實首乘起），與我國古籌算法一致。可見"鋪地錦"是從古籌算而來，不是來之於印度或伊斯蘭國家。

4. 這裡我們提出一個最重要的證據。我國原始的"鋪地錦"没有畫方格，與印度及阿拉伯國家畫有方格的"格子乘法"截然不一樣。此種未畫方格的"鋪地錦"，見於現傳本《盤珠算法》（1573）。該書第十一頁有"鋪地錦"介紹。因現存的《盤珠算法》是坊間的翻刻本，字句多有闕略，我補正後，録如下（括弧內是增補文字）[6]：

"鋪地錦不有用算盤而因乘見總

（今有米二斗三升四合，）每斗要銀五分五厘，問銀多少？

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麽能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參 考 文 獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

今有米	二斗	三升	四合	（每斗銀五分
	一錢	一分五厘	二厘	
	一分	一厘五毫	二毫	五厘）

法曰：　二五一十　　二五一十　　三五一十五

三一五一十五　四五二十　　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果説"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麽棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麽能説其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全. 景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘诀盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法统宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽绛譯. 數學史，1987. 北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》. 秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

今有米	二斗	三升	四合	（每斗銀五分
	一錢	一分五厘	二厘	
	一分	一厘五毫	二毫	五厘）

法曰：　二五一十　　二五一十　　　三五一十五
　　　三一五一十五　四五二十　　　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麽棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於1573年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麽能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於1573年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明]吳敬.九章詳注比類算法大全.景泰元年(1450)刻本
3. 李迪.中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A.吉特爾曼著,歐陽絳譯.數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麽能説其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘诀盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣内容而書名不同的還有多種，説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼"，止用一倍，比吴敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吴敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》内所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參 考 文 獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果説"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麽棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麽能説其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼",止用一倍,比吴敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吴敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吴敬. 九章詳注比類算法大全.景泰元年(1450)刻本
3. 李迪.中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯.數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,259
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

今有米	二斗	三升	四合	(每斗銀五分
	一錢	一分五厘	二厘	
	一分	一厘五毫	二毫	五厘)

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
　　　三一五一十五　四五二十　四五二十”

這種“鋪地錦”的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果説“鋪地錦”由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的“鋪地錦”,然後演變爲畫上方格的“鋪地錦”,傳到印度,成爲“格子乘法”的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麼能説其中的“鋪地錦”爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是“新刻”、“訂正”、“家傳”,是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的“金蟬脱殼”,止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的“鋪地錦”是最早的形式,而且“鋪地錦”是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,“鋪地錦”創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參 考 文 獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全,景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　　二五一十　　三五一十五
　　　　三一五一十五　四五二十　　四五二十”

這種“鋪地錦”的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說“鋪地錦”由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的“鋪地錦”，然後演變爲畫上方格的“鋪地錦”，傳到印度，成爲“格子乘法”的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麼能說其中的“鋪地錦”爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是“新刻”、“訂正”、“家傳”，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的“金蟬脫殼”，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的“鋪地錦”是最早的形式，而且“鋪地錦”是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，“鋪地錦”創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，泰九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6.（日）兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，（日本）富士短期大學出版部，5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　　二五一十　　三五一十五
　　　三一五一十五　四五二十　　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全,景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

今有米	二斗	三升	四合	（每斗銀五分
	一錢	一分五厘	二厘	
	一分	一厘五毫	二毫	五厘）

法曰：　二五一十　　二五一十　　三五一十五
　　　　三一五一十五　四五二十　　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麽棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麽能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

今有米
二斗　一錢　一分
三升　一分五厘　一厘五毫
四合　二厘　二毫
(每斗銀五分　五厘)

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
　　　三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麽能説其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘決盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全,景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全,景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

今有米
二斗　一錢　一分
三升　一分五厘　一厘五毫
四合　二厘　二毫
（每斗銀五分　五厘）

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十”

這種“鋪地錦”的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說“鋪地錦”由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的“鋪地錦”，然後演變爲畫上方格的“鋪地錦”，傳到印度，成爲“格子乘法”的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麼能說其中的“鋪地錦”爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是“新刻”、“訂正”、“家傳”，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的“金蟬脫殼”，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的“鋪地錦”是最早的形式，而且“鋪地錦”是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，“鋪地錦”創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參 考 文 獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十”

這種“鋪地錦”的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說“鋪地錦”由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的“鋪地錦”，然後演變爲畫上方格的“鋪地錦”，傳到印度，成爲“格子乘法”的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於1573年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麽能説其中的“鋪地錦”爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於1573年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是“新刻”、“訂正”、“家傳”，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的“金蟬脱殼”，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的“鋪地錦”是最早的形式，而且“鋪地錦”是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，“鋪地錦”創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6.（日）兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，（日本）富士短期大學出版部，5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於1573年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於1573年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明]吳敬.九章詳注比類算法大全,景泰元年(1450)刻本
3. 李迪.中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A.吉特爾曼著,歐陽絳譯.數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

(每斗銀五分　五厘)
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全,景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

今有米
二斗　一錢　一分
三升　一分五厘　一厘五毫
四合　二厘　二毫
（每斗銀五分　五厘）

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十”

這種“鋪地錦”的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說“鋪地錦”由外國傳來，那末爲甚麽棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的“鋪地錦”，然後演變爲畫上方格的“鋪地錦”，傳到印度，成爲“格子乘法”的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麽能說其中的“鋪地錦”爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是“新刻”、“訂正”、“家傳”，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的“金蟬脱殼”，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的“鋪地錦”是最早的形式，而且“鋪地錦”是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，“鋪地錦”創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
　　　三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麽能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全. 景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰:　二五一十　二五一十　三五一十五
　三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全. 景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》. 秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　　二五一十　　三五一十五
　　　　三一五一十五　四五二十　　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麽棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麽能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，説明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脱殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》内所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽绛譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰：該銀一錢二分八厘七毫

（每斗銀五分　五厘）
四合　二厘　二毫
三升　一分五厘　一厘五毫
二斗　一錢　一分
今有米

法曰：　二五一十　二五一十　三五一十五
三一五一十五　四五二十　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是：未畫方格，寫出單位，未寫乘積。寫出單位後，把相同單位的數字加起來，也可得到乘積，但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來，那末爲甚麼棄其先進而改爲落後呢？可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦"，然後演變爲畫上方格的"鋪地錦"，傳到印度，成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題：現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年，遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲，怎麼能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢？

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年，但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》，它是"新刻"、"訂正"、"家傳"，是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種，說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼"，止用一倍，比吳敬的用一、二、五倍更爲原始，所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式，而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點，我們初步斷定，"鋪地錦"創於我國，並非自國外傳入。當然理由尚不充分，還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》，1990，合肥安徽教育出版社，951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全，景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編，1984，瀋陽：遼寧人民出版社，219
4. A. 吉特爾曼著，歐陽絳譯. 數學史，1987，北京：科學普及出版社，128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》，秦九韶與數書九章，1987，北京：北京師範大學出版社，269
6.（日）兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》，1960，(日本)富士短期大學出版部，5。

答曰:該銀一錢二分八厘七毫

今有米
二斗　一錢　一分
三升　一分五厘　一厘五毫
四合　二厘　二毫
（每斗銀五分　五厘）

法曰:　二五一十　　二五一十　　三五一十五
　　　三一五一十五　四五二十　　四五二十"

這種"鋪地錦"的特點是:未畫方格,寫出單位,未寫乘積。寫出單位後,把相同單位的數字加起來,也可得到乘積,但總不如畫出方格那樣方便。如果說"鋪地錦"由外國傳來,那末爲甚麽棄其先進而改爲落後呢?可見在我國先有未畫格眼的"鋪地錦",然後演變爲畫上方格的"鋪地錦",傳到印度,成爲"格子乘法"的。

這裡存在一個問題:現傳本《盤珠算法》刻於 1573 年,遠比印度《麗羅瓦底》(1150)爲遲,怎麽能說其中的"鋪地錦"爲最早形式呢?

現傳本《盤珠算法》雖然刻於 1573 年,但並非創作於此年。全書名爲《新刻訂正家傳秘訣盤珠算法士民利用》,它是"新刻"、"訂正"、"家傳",是早已有之書的翻刻。有同樣內容而書名不同的還有多種,說明它們有一個共同的祖本。我們看到此書中的"金蟬脫殼",止用一倍,比吳敬的用一、二、五倍更爲原始,所以此書祖本比吳敬的書更早。我們懷疑這個祖本很可能就是程大位在《算法統宗》內所記載的《盤珠集》。所以我們認爲這裡記載的"鋪地錦"是最早的形式,而且"鋪地錦"是最早的名稱。

由以上幾點,我們初步斷定,"鋪地錦"創於我國,並非自國外傳入。當然理由尚不充分,還需進一步探討。

參考文獻

1. 梅榮照、李兆華.《算法統宗校釋》,1990,合肥安徽教育出版社,951
2. [明] 吳敬. 九章詳注比類算法大全,景泰元年(1450)刻本
3. 李迪. 中國數學史簡編,1984,瀋陽:遼寧人民出版社,219
4. A. 吉特爾曼著,歐陽絳譯. 數學史,1987,北京:科學普及出版社,128
5. 沈康身.《麗羅娃底》與《數書九章》,秦九韶與數書九章,1987,北京:北京師範大學出版社,269
6. (日)兒玉明人編.《十六世紀末明刊 珠算書》,1960,(日本)富士短期大學出版部,6。